

Sur la cohomologie de la compactification des variétés de Deligne-Lusztig

Haoran Wang

Résumé

Nous étudions la cohomologie de la compactification des variétés de Deligne-Lusztig associées aux éléments de Coxeter. Nous présentons une conjecture des relations entre la cohomologie de la variété et la cohomologie de ses compactifications partielles. Nous prouvons la conjecture dans le cas du groupe linéaire général.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Généralités	3
2.1	Préliminaires	3
2.2	Les orbites de Coxeter	7
3	La compactification partielle	9
3.1	Énoncé de la conjecture A	9
3.2	Conjecture A \Leftrightarrow Conjecture A'	10
3.3	Réduction au cas de codimension 1	14
4	Le cas où $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_q)$	16
4.1	L'espace de Drinfeld sur un corps fini	16
4.2	Quotients de Lusztig explicites	21
5	Théorème principal	28
5.1	Énoncé du théorème	28
5.2	Étape 1 : le cas de codimension 1	28

1 Introduction

Soient q une puissance d'un nombre premier p , \mathbf{G} un groupe réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ muni d'une structure \mathbb{F}_q -rationnelle et F l'isogénie de Frobenius correspondante.

Si w est un élément du groupe de Weyl, dans leur article fondateur [DL76] Deligne et Lusztig ont introduit deux variétés $X(w)$ et $Y(w)$ munies d'une action de \mathbf{G}^F ainsi qu'un morphisme fini étale \mathbf{G}^F -équivariant $\pi : Y(w) \rightarrow X(w)$, faisant de $X(w)$ un quotient de $Y(w)$ par l'action d'un groupe fini commutatif (dans [DL76] la variété $Y(w)$ est notée $\tilde{X}(w)$). Dans leur travail, ils ont également construit une compactification lisse $\overline{X}(w)$ de $X(w)$ à la Bott-Samelson-Demazure-Hansen.

Lorsque w est un élément de Coxeter, l'étude de la géométrie des variétés de Deligne-Lusztig a commencé par Lusztig [Lus77], et puis Bonnafé et Rouquier [BR06], et Dudas [Dud10]. Dans ce cas, la compactification $\overline{X}(w)$ possède une stratification dont les strates sont indexées par les sous-groupes paraboliques propres F -stables. Plus précisément, soient \mathbf{P} un sous-groupe parabolique propre F -stable et \mathbf{U} son radical unipotent, la strate fermée associée à \mathbf{P} est

$$\overline{X}_{\mathbf{P}}(w) := \overline{X}(w)^{\mathbf{U}^F}.$$

Notons $j : X(w) \hookrightarrow \overline{X}(w)$ et $i_{\mathbf{P}} : \overline{X}_{\mathbf{P}}(w) \hookrightarrow \overline{X}(w)$ les immersions naturelles.

Le but principal de cet article est de démontrer le théorème suivant (voir (5.1.1)) :

THÉORÈME. – Soient $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_d$, F l'endomorphisme de Frobenius standard $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \mapsto (a_{ij}^q)_{1 \leq i, j \leq d}$ et $w = (1, \dots, d) \in \mathfrak{S}_d$. Alors le morphisme de restriction :

$$R\Gamma(X(w), \pi_*\Lambda) = R\Gamma(\overline{X}(w), Rj_*(\pi_*\Lambda)) \xrightarrow{\mathrm{res}} R\Gamma(\overline{X}_{\mathbf{P}}(w), i_{\mathbf{P}}^* Rj_*(\pi_*\Lambda))$$

induit un isomorphisme

$$(1.0.1) \quad R\Gamma(X(w), \pi_*\Lambda)^{\mathbf{U}^F} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{X}_{\mathbf{P}}(w), i_{\mathbf{P}}^* Rj_*(\pi_*\Lambda)),$$

où $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^m$ pour un nombre premier $\ell \neq p$.

Notre motivation pour ce théorème vient du lien avec les correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands locales. Plus précisément, si K est un corps p -adique de corps résiduel \mathbb{F}_q , les composantes irréductibles de la fibre spéciale de l'espace symétrique de Drinfeld pour $\mathrm{GL}_d(K)$ sont naturellement isomorphes à $\overline{X}(w)$ et nous montrons dans [Wan13] que les cycles proches du revêtement modéré de Drinfeld sur une telle composante s'identifient naturellement à $Rj_*(\pi_*\Lambda)$. Le théorème ci-dessus nous permet alors, toujours dans [Wan13], de calculer explicitement, et de manière purement locale, la cohomologie du revêtement modéré de Drinfeld, et d'en déduire en particulier qu'elle réalise les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands pour les représentations elliptiques modérément ramifiées de $\mathrm{GL}_d(K)$.

L'énoncé du théorème fait sens pour n'importe quel élément de Coxeter w d'un groupe réductif \mathbf{G} défini sur \mathbb{F}_q , et nous conjecturons qu'il est vrai dans cette généralité (voir 3.1). La démonstration du théorème se fait en trois étapes.

La première étape de notre preuve utilise le calcul explicite de la normalisation de $\overline{X}(w)$ dans $Y(w)$ dû à Bonnafé et Rouquier dans [BR09] pour se ramener au même

énoncé pour la strate “ouverte” $j_{\mathbf{P}} : X_{\mathbf{P}}(w) := \overline{X}_{\mathbf{P}}(w) \setminus \bigcup_{\mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{P}} \overline{X}_{\mathbf{Q}}(w) \hookrightarrow \overline{X}(w)$. Cette étape, décrite au paragraphe 3.2, fonctionne pour tout \mathbf{G} .

La deuxième étape étudie la compactification partielle $X^{\mathbf{P}}(w) := X(w) \cup X_{\mathbf{P}}(w) \subset \overline{X}(w)$ lorsque \mathbf{P} est propre et maximal. On construit au paragraphe 4.2 un isomorphisme

$$\mathbf{U}^F \backslash X^{\mathbf{P}}(w) \xrightarrow{\sim} X_{\mathbf{L}}(w_{\mathbf{L}}) \times \mathbb{A}^1$$

compatible avec l’isomorphisme de Lusztig $\mathbf{U}^F \backslash X(w) \xrightarrow{\sim} X_{\mathbf{L}}(w_{\mathbf{L}}) \times \mathbb{G}_m$ de [Lus77]. Ici \mathbf{L} désigne le quotient réductif de \mathbf{P} est $w_{\mathbf{L}}$ un élément de Coxeter de \mathbf{L} . Pour cette construction, on utilise une description alternative de $\overline{X}(w)$ comme éclaté d’espace projectif, valable seulement pour GL_d déployé. Dans le paragraphe 5.2, on déduit le théorème dans ce cas \mathbf{P} maximal par un argument inspiré de Dudas [Dud10] et qui devrait fonctionner en toute généralité, si on a un isomorphisme comme ci-dessus.

Enfin, la troisième étape est une récurrence sur le corang de \mathbf{P} . Pour \mathbf{G} quelconque, on explique cette récurrence au paragraphe 3.3, sous l’hypothèse que le cas de corang 1 est connu pour tout sous-groupe de Levi de G .

Organisation de l’article. Dans la section 2, nous rappelons les préliminaires sur les variétés de Deligne-Lusztig, notamment la construction de Bonnafé et Rouquier [BR09] et le morphisme de quotient de Lusztig [Lus77]. Ensuite, on décrit en toute généralité la première et la troisième étapes mentionnées ci-dessus. Dans la section 4, nous étudions le cas associé à GL_d . Finalement, nous démontrons notre théorème dans la section 5.

Remerciements : Je remercie profondément mon directeur de thèse Jean-François Dat pour les nombreuses discussions et ses constants encouragements pendant ces années. Je remercie Zhi Jiang pour les conversations sur l’éclatement. Enfin, je remercie le referee anonyme pour ses suggestions qui ont permis d’en améliorer considérablement la rédaction.

2 Généralités

Dans cette partie, on rappelle tout d’abord la définition des variétés de Deligne-Lusztig [DL76] et la construction de Bonnafé et Rouquier [BR09]. Ensuite, dans le cas de Coxeter, on rappelle certains résultats de Lusztig [Lus77].

2.1 Préliminaires

(2.1.1) Nous fixons un groupe réductif connexe \mathbf{G} défini sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ du corps fini \mathbb{F}_q . Nous supposons de plus que \mathbf{G} est obtenu par extension des scalaires de \mathbf{G}_0 sur \mathbb{F}_q , et nous notons $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ l’endomorphisme de Frobenius correspondant.

Fixons un sous-groupe de Borel F -stable \mathbf{B} de \mathbf{G} , un tore maximal F -stable \mathbf{T} de \mathbf{B} et notons \mathbf{U} le radical unipotent de \mathbf{B} . Notons $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ le groupe

de Weyl de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} , $X(\mathbf{T})$ (resp. $Y(\mathbf{T})$) le réseau des caractères (resp. des sous-groupes à un paramètre) de \mathbf{T} , Φ (resp. Φ^\vee) le système de racines (resp. coracines) de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} , Δ (resp. Δ^\vee) la base de Φ (resp. Φ^\vee) associée à \mathbf{B} et Φ_+ (resp. Φ_+^\vee) l'ensemble des racines (resp. coracines) positives contenant Δ (resp. Δ^\vee). En particulier, Φ est stable sous l'action de F . Si α est une racine, $F(\alpha)$ est un multiple positif d'une unique racine que l'on notera $\phi(\alpha)$, définissant une bijection $\phi : \Phi \rightarrow \Phi$ qui stabilise Δ et Φ_+ .

Pour $\alpha \in \Phi$, on notera α^\vee sa coracine associée, $s_\alpha \in W$ la réflexion par rapport à α , \mathbf{U}_α le sous-groupe unipotent à un paramètre normalisé par \mathbf{T} associé à α , et \mathbf{G}_α le sous-groupe de \mathbf{G} engendré par \mathbf{U}_α et $\mathbf{U}_{-\alpha}$. Posons $S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. On désignera $l : W \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction longueur relativement à S . D'après [Spr98, 9.3], il existe un ensemble de représentants $\{\dot{w}\}$ de W dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ vérifiant la propriété suivante : si $w = w_1 w_2$ est tel que $l(w) = l(w_1) + l(w_2)$, alors $\dot{w} = \dot{w}_1 \dot{w}_2$.

Pour un élément w du groupe de Weyl W , Deligne et Lusztig ont construit dans [DL76] deux variétés $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ (ou $X_{\mathbf{G}}(w)$ et $Y_{\mathbf{G}}(\dot{w})$ s'il y a confusion possible) sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ ainsi qu'un morphisme fini étale $Y(\dot{w}) \rightarrow X(w)$ faisant de $X(w)$ un quotient de $Y(\dot{w})$ par l'action du groupe fini $\mathbf{T}^{wF} := \{t \in \mathbf{T} \mid wF(t)w^{-1} = t\}$ (dans *loc. cit.*, la variété $Y(\dot{w})$ est notée $\tilde{X}(\dot{w})$). Rappelons ci-dessous leurs définitions :

$$\begin{aligned} Y(\dot{w}) &:= Y_{\mathbf{G}}(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\} \\ X(w) &:= X_{\mathbf{G}}(w) = \{g\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}. \end{aligned}$$

Le groupe fini \mathbf{G}^F agit par multiplication à gauche sur les variétés quasi-projectives $X(w)$ et $Y(\dot{w})$. De plus, le groupe commutatif \mathbf{T}^{wF} agit librement sur $Y(\dot{w})$ par multiplication à droite. Le morphisme $\pi_w : Y(\dot{w}) \rightarrow X(w)$ induit par restriction à $Y(\dot{w})$ de la projection canonique $\mathbf{G}/\mathbf{U} \twoheadrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ s'identifie à quotienter par \mathbf{T}^{wF} , induisant ainsi un isomorphisme \mathbf{G}^F -équivariant $Y(\dot{w})/\mathbf{T}^{wF} \xrightarrow{\sim} X(w)$. Les variétés $X(w)$ et $Y(\dot{w})$ ainsi obtenues sont quasi-affines, lisses et purement de dimension $l(w)$.

Dans leur travail, Deligne et Lusztig ont construit également une compactification de Bott-Samelson-Demazure-Hansen des variétés $X(w)$ ([DL76, 9.10]) que nous rappelons ci-dessous.

Soit $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$, une expression minimale de w , par rapport à la fonction longueur. On notera $w_i := s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{i-1}} s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{r-1}} \in W$. Posons alors, suivant [DL76]

$$\begin{aligned} \overline{X}(w) &:= \left\{ (g_1\mathbf{B}, \dots, g_{r+1}\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid g_{r+1}\mathbf{B} = F(g_1)\mathbf{B}, \right. \\ &\quad \left. g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{B}s_{\alpha_i}\mathbf{B} \cup \mathbf{B}, \forall 1 \leq i \leq r \right\}. \end{aligned}$$

D'après [DL76, 1.2], la variété $X(w)$ s'identifie à la sous variété ouverte

$$\{(g_1\mathbf{B}, \dots, g_{r+1}\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid g_{r+1}\mathbf{B} = F(g_1)\mathbf{B}, g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{B}s_{\alpha_i}\mathbf{B}, \forall 1 \leq i \leq r\}$$

de $\overline{X}(w)$. De plus, $\overline{X}(w)$ est une variété lisse projective et $\overline{X}(w) \setminus X(w) = \bigcup_{1 \leq i \leq r} \overline{X}(w_i)$ est un diviseur à croisements normaux ([DL76, Lemme 9.11]). Notons que

$$(2.1.2) \quad \overline{X}(w) = \coprod_{\substack{x=x_1 \cdots x_r \in W \\ x_i \in \{1, s_{\alpha_i}\}}} X(x).$$

(2.1.3) Dans [BR09], Bonnafé et Rouquier ont donné une construction explicite de la normalisation de $\overline{X}(w)$ dans $Y(\dot{w})$, noté $\overline{Y}(\dot{w})$. C'est l'unique variété normale Z contenant $Y(\dot{w})$ comme sous-variété ouverte dense et munie d'un morphisme fini $\overline{\pi}_w : Z \rightarrow \overline{X}(w)$ prolongeant π_w . Rappelons ci-dessous leurs constructions.

Tout d'abord, on peut supposer que le groupe dérivé de \mathbf{G} est simplement connexe (*cf.* [BR09]). Ceci implique que $\mathbf{G}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2$ et que α^\vee est injective pour toute racine α . Si $1 \leq i \leq r$, il existe un unique $\lambda_i \in Y(\mathbf{T})$ et un unique $m_i \in \mathbb{Z}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_i - wF(\lambda_i) = m_i s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee), \\ m_i > 0, \\ Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i \text{ est sans torsion.} \end{cases}$$

Bonnafé et Rouquier définissent une fonction $\varphi_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{A}^1$ satisfaisant les propriétés de *loc. cit.* Prop. 2.2. Comme eux, posons

$$\tilde{\mathcal{U}}(w) := \{\mathbf{g} := (g_1 \mathbf{U}, \dots, g_{r+1} \mathbf{U}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \mid \forall 1 \leq i \leq r, g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}\},$$

et notons

$$\begin{aligned} \tilde{v}_w : \tilde{\mathcal{U}}(w) &\longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ (g_1 \mathbf{U}, \dots, g_{r+1} \mathbf{U}) &\mapsto (g_1 \mathbf{U}, g_{r+1} \mathbf{U}). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_r)$ une suite de r entiers, notons

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}(w) := \{(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{U}}(w) \times \mathbb{A}^r \mid \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1} g_{i+1}) = \xi_i^{m_i}\}$$

et de même

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}^I(w) := \{(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}(w) \mid \forall i \in I, \xi_i = 0\}$$

pour un sous-ensemble I de $\{1, \dots, r\}$. Notons

$$\Gamma_F := \{(g_1 \mathbf{U}, g_2 \mathbf{U}) \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g_2 \mathbf{U} = F(g_1) \mathbf{U}\}$$

le graphe du morphisme de Frobenius. Considérons la variété

$$\tilde{Y}(w) := \{(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}(w) \mid \tilde{v}_w(\mathbf{g}) \in \Gamma_F\}$$

et ses sous-variétés localement fermées paramétrées par les sous-ensembles de $\{1, \dots, r\}$:

$$\tilde{Y}_I(w) := \{(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}^I(w) \mid \tilde{v}_w(\mathbf{g}) \in \Gamma_F\}.$$

Bonnafé et Rouquier définissent une action naturelle de $\mathbf{T}^{wF} \times (\mathbb{G}_m)^r$ sur la variété $\tilde{Y}(w)$, faisant $\overline{X}(w)$ le quotient de $\tilde{Y}(w)$ par cette action, cf. [BR09, Prop. 2.6], et $\tilde{Y}_I(w)$ est stable sous cette action. Ils démontrent le théorème suivant :

(2.1.4) THÉORÈME.— ([BR09, Théorème. 1.2 (b)]) *La variété $\overline{Y}(w) = \tilde{Y}(w)/(\mathbb{G}_m)^r$ est normale et elle est munie d'une action de \mathbf{T}^{wF} prolongeant l'action sur $Y(w)$ telle que le morphisme de quotient $\overline{Y}(w) = \tilde{Y}(w)/(\mathbb{G}_m)^r \rightarrow \overline{X}(w)$ induit un isomorphisme $\overline{Y}(w)/\mathbf{T}^{wF} \xrightarrow{\sim} \overline{X}(w)$; autrement dit, elle est la normalisation de $\overline{X}(w)$ dans $Y(w)$.*

Pour la commodité du lecteur, on donne quelques propriétés faciles de la variété $\tilde{Y}(w)$ qui seront utilisées dans la preuve du lemme (3.2.2).

(2.1.5) LEMME.— *Pour I un sous-ensemble de $\{1, \dots, r\}$, la variété $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}^I(w)$ est lisse, de dimension $2r + \dim \mathbf{G}/\mathbf{U} - |I|$.*

Preuve : Notons $w(i) := s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_i}$, $\mathbf{m}_i := (m_1, \dots, m_i)$ et $I_i := \{1, \dots, i\} \cap I$. On dispose d'une suite de morphismes canoniques (cf. [BR09, Prop. 2.3])

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}^I(w) = \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}_r}^{I_r}(w(r)) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}_{r-1}}^{I_{r-1}}(w(r-1)) \rightarrow \cdots \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}_1}^{I_1}(w(1)) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$$

consistant à chaque étape à oublier le dernier terme de \mathbf{g} et $\boldsymbol{\xi}$. Lorsque $i \notin I$, la fibre du morphisme $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}_i}^{I_i}(w(i)) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}_{i-1}}^{I_{i-1}}(w(i-1))$ est isomorphe à $\mathcal{U}_{\alpha_i, m_i} = \{(g, \xi) \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}/\mathbf{U} \times \mathbb{A}^1 \mid \varphi_{\alpha_i}(g) = \xi^{m_i}\}$. D'après [BR09, Prop. 2.3],

$$\mathcal{U}_{\alpha_i, m_i} \xrightarrow{\sim} \{(x, y, \xi) \in \mathbb{A}^3 \mid (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } y = \xi^{m_i}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Lorsque $i \in I$, la fibre du morphisme $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}_i}^{I_i}(w(i)) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}_{i-1}}^{I_{i-1}}(w(i-1))$ est isomorphe à $\{(g, \xi) \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}/\mathbf{U} \times \mathbb{A}^1 \mid \varphi_{\alpha_i}(g) = 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Donc c'est une suite des fibrations successives de fibres successivement isomorphes à des variétés lisses (de dimension 1 ou 2), d'où l'énoncé du lemme. \square

(2.1.6) COROLLAIRE.— *La variété $\tilde{Y}_I(w)$ est lisse, purement de dimension $2r - |I|$.*

Preuve : Ceci découle directement du lemme précédent et [BR09, Lemme 2.5]. \square

(2.1.7) COROLLAIRE.— *La variété $\tilde{Y}_{\varnothing}(w)$ est une sous-variété ouverte dense dans $\tilde{Y}(w)$ dont le complémentaire est un diviseur à croisements normaux.*

Preuve : La première assertion est dans [BR09, Page 634-635]. La deuxième assertion repose sur le corollaire précédent. En effet, pour $1 \leq i \leq r$, notons $\tilde{Y}_i(w) := \tilde{Y}_{\{i\}}(w)$. Chaque $\tilde{Y}_i(w)$ est un diviseur de $\tilde{Y}(w)$, et

$$\tilde{Y}(w) \setminus \tilde{Y}_\emptyset(w) = \bigcup_{1 \leq i \leq r} \tilde{Y}_i(w).$$

Grâce au corollaire précédent,

$$\tilde{Y}_I(w) = \bigcap_{i \in I} \tilde{Y}_i(w)$$

est de codimension $|I|$ dans $\tilde{Y}(w)$, $\forall I \subset \{1, \dots, r\}$. □

2.2 Les orbites de Coxeter

Soient $n = |\Delta/\phi|$ et $[\Delta/\phi] := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un système de représentants de Δ/ϕ . Notons $c = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$ (ou $c_{\mathbf{G}}$ s'il y a confusion possible) un élément de Coxeter, w_Δ l'élément de W de longueur maximale. Soit I un sous-ensemble de racines simples stable sous ϕ , nous notons W_I le sous-groupe de W engendré par les $\{s_\alpha\}_{\alpha \in I}$, \mathbf{P}_I le sous-groupe parabolique $\mathbf{B}W_I\mathbf{B}$ de \mathbf{G} . Posons \mathbf{T}_I la composante connexe de l'élément neutre de $\bigcap_{\alpha \in I} \text{Ker } \alpha$, $\mathbf{L}_I := Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_I)$ l'unique composante de Levi de \mathbf{P}_I contenant \mathbf{T} , \mathbf{B}_I le sous-groupe de Borel $\mathbf{B} \cap \mathbf{L}_I$ de \mathbf{L}_I , \mathbf{U}_I le radical unipotent de \mathbf{P}_I , et \mathbf{V}_I le radical unipotent de \mathbf{B}_I . Le groupe de Weyl $W_{\mathbf{L}_I}$ de \mathbf{L}_I associé à \mathbf{T} s'identifie à W_I . On notera les groupes de points F -stables par les caractères non épaissis correspondants $G, P_I, L_I, U_I, V_I, \dots$

Pour un sous-ensemble propre I de Δ stable sous ϕ , on peut considérer la variété de Deligne-Lusztig $X_{\mathbf{L}_I}(c_I)$ associée au groupe réductif \mathbf{L}_I et l'élément de Coxeter c_I de $W_{\mathbf{L}_I}$ obtenu à partir de c en ne gardant que les réflexions simples de I . Notons $X_I := X(x_1 \cdots x_n)$, où $x_i \in \{1, s_{\alpha_i}\}$ et $x_i = s_{\alpha_i}$ si et seulement si $\alpha_i \in I$. D'après Lusztig [Lus76], les variétés $X_{\mathbf{L}_I}(c_I)$ et X_I sont reliées par la propriété suivante :

(2.2.1) PROPOSITION.— ([Lus77, 1.17], [Lus76, Lemme 3], voir aussi [BR06, Prop. 3.3]) *Sous l'hypothèse comme plus haut, on a des isomorphismes canoniques :*

$$\begin{aligned} G/U_I \times_{L_I} X_{\mathbf{L}_I}(c_I) &\xrightarrow{\sim} X_I \\ (gU_I, h\mathbf{B}_I) &\mapsto gh\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Comme c_I est un élément de Coxeter de $W_{\mathbf{L}_I}$, la variété $X_{\mathbf{L}_I}(c_I)$ est irréductible d'après [Lus77, Prop. 4.8]. Alors, X_I est une union disjointe de ses composantes irréductibles chacune isomorphe à $X_{\mathbf{L}_I}(c_I)$. Notons alors C_I la composante irréductible de X_I fixée par U_I , d'après [Lus77, 1.17],

$$C_I = \{(g_1\mathbf{B}, \dots, g_{n+1}\mathbf{B}) \in X_I \mid g_1\mathbf{B}g_1^{-1} \subset \mathbf{P}_I\},$$

munie d'un isomorphisme L_I -équivariant avec $X_{L_I}(c_I)$. Notons ensuite \overline{C}_I son adhérence dans $\overline{X}(c)$, alors

$$\overline{C}_I = \{(g_1 \mathbf{B}, \dots, g_{n+1} \mathbf{B}) \in \overline{X}_I \mid g_1 \mathbf{B} g_1^{-1} \subset \mathbf{P}_I\}.$$

On en déduit que U_I agit trivialement sur \overline{C}_I , et C_I n'a pas de points fixes sous un sous-groupe unipotent de L_I , comme C_I est une variété de Coxeter.

Plus généralement, on peut définir la stratification indexée par les sous-groupes paraboliques F -stables mentionnée dans l'introduction. Pour \mathbf{P} un sous-groupe parabolique F -stable conjugué à \mathbf{P}_I , on note $X_{\mathbf{P}} := g \cdot C_I$, où $g \in G$ est tel que $\mathbf{P} = g \mathbf{P}_I g^{-1}$. Alors, X_I est une union disjointe de $X_{\mathbf{P}}$ où \mathbf{P} parcourt l'ensemble des sous-groupes paraboliques F -stables conjugués à \mathbf{P}_I . La variété $X_{\mathbf{P}}$ est localement fermée, irréductible, et son adhérence est

$$\overline{X}_{\mathbf{P}} = \bigcup_{\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}} X_{\mathbf{Q}}.$$

Notons $U_{\mathbf{P}}$ le sous-groupe unipotent des points rationnels du radical unipotent de \mathbf{P} , alors $U_{\mathbf{P}}$ agit trivialement sur $X_{\mathbf{P}}$ et $\overline{X}_{\mathbf{P}}$. On démontre que l'ensemble des points fixes de $\overline{X}(c)$ sous l'action de $U_{\mathbf{P}}$ s'identifie à $\overline{X}_{\mathbf{P}}$. En effet, si $U_{\mathbf{P}}$ a des points fixes dans une strate $X_{\mathbf{Q}}$, alors $U_{\mathbf{P}}$ normalise \mathbf{Q} , donc $U_{\mathbf{P}}$ est contenu dans \mathbf{Q} . Par ailleurs, comme $X_{\mathbf{Q}}$ n'a pas de points fixes sous un sous-groupe unipotent de son quotient de Levi $L_{\mathbf{Q}}$, on a $U_{\mathbf{P}}$ contenu dans $U_{\mathbf{Q}}$, donc \mathbf{P} contient \mathbf{Q} et $X_{\mathbf{Q}} \subset \overline{X}_{\mathbf{P}}$. En particulier, on sait alors que $\overline{C}_I = \overline{X}(c)^{U_I}$.

(2.2.2) Lorsque les variétés de Deligne-Lusztig sont associées à des éléments de Coxeter, Lusztig a construit dans [Lus77] leurs quotients par U et U_I . Rappelons ci-dessous leurs constructions. Notons comme dans [BR06],

$$(2.2.3) \quad X'(c) = \{u \in \mathbf{U} \mid u^{-1} F(u) \in (\mathbf{U}_{-w_{\Delta}(\alpha_1)} \setminus \{1\}) \times \cdots \times (\mathbf{U}_{-w_{\Delta}(\alpha_n)} \setminus \{1\})\}$$

Tout d'abord, Lusztig a démontré le théorème suivant :

(2.2.4) THÉORÈME.— ([Lus77, 2.5, 2.6])

(a) $X(c) \subset \mathbf{B} w_{\Delta} \cdot \mathbf{B} / \mathbf{B}$.

(b) *Le morphisme*

$$\begin{aligned} L : X'(c) &\longrightarrow X(c) \\ u &\longmapsto u w_{\Delta} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de variétés.

REMARQUE.— En faisant agir sur $X'(c)$ le p -groupe fini U par multiplication à gauche, et le groupe commutatif \mathbf{T}^F par conjugaison, l'isomorphisme L est B -équivariant.

(2.2.5) THÉORÈME.— ([Lus77, Corollaries 2.7, 2.10])

(a) L'isomorphisme L dans (b) du théorème précédent induit un isomorphisme

$$(\mathbb{G}_m)^n = (\mathbf{U}_{-w_\Delta(\alpha_1)} \setminus \{1\}) \times \cdots \times (\mathbf{U}_{-w_\Delta(\alpha_n)} \setminus \{1\}) \xrightarrow{\sim} U \setminus X(c).$$

(b) On a un morphisme naturel induit par l'isomorphisme dans (a) :

$$U_I \setminus X(c) \rightarrow U \setminus X(c) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{U}_{-w_\Delta(\alpha_1)} \setminus \{1\}) \times \cdots \times (\mathbf{U}_{-w_\Delta(\alpha_n)} \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbf{U}_{-w_\Delta(\alpha_i)} = \mathbb{G}_m.$$

Ce morphisme induit un isomorphisme V_I -équivariant

$$U_I \setminus X(c) \xrightarrow{\sim} X_{\mathbf{L}_I}(c_I) \times \mathbb{G}_m,$$

ainsi qu'un isomorphisme L_I -équivariant de cohomologies :

$$R\Gamma(U_I \setminus X(c), \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_{\mathbf{L}_I}(c_I) \times \mathbb{G}_m, \Lambda).$$

3 La compactification partielle

3.1 Énoncé de la conjecture A

On utilise les notations de la section 2.2, et on désigne $i_I : \overline{C}_I \hookrightarrow \overline{X}(c)$ l'inclusion naturelle pour tout $I \subsetneq \Delta$ stable sous ϕ . Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Y(\dot{c}) & \xrightarrow{j'} & \overline{Y}(\dot{c}) & \xleftarrow{i'_I} & \overline{\pi}^{-1}(\overline{C}_I) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \overline{\pi} & & \downarrow \overline{\pi}_I \\ X(c) & \xrightarrow{j} & \overline{X}(c) & \xleftarrow{i_I} & \overline{C}_I \end{array}$$

où $\overline{\pi}^{-1}(\overline{C}_I) := (\overline{Y}(\dot{c}) \times_{\overline{X}(c)} \overline{C}_I)_{\text{red}}$ et $\overline{\pi}_I = \overline{\pi}|_{\overline{\pi}^{-1}(\overline{C}_I)}$. On a formulé dans l'introduction la conjecture suivante :

Conjecture A. *Le morphisme de restriction :*

$$R\Gamma(X(c), \pi_* \Lambda) = R\Gamma(\overline{X}(c), Rj_*(\pi_* \Lambda)) \xrightarrow{\text{res}} R\Gamma(\overline{C}_I, i_I^* Rj_*(\pi_* \Lambda))$$

induit un isomorphisme

$$R\Gamma(X(c), \pi_* \Lambda)^{U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{C}_I, i_I^* Rj_*(\pi_* \Lambda)),$$

où $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}$, pour un nombre premier $\ell \neq p$.

3.2 Conjecture A \Leftrightarrow Conjecture A'

Dans cette partie, on démontre que la conjecture A équivaut à la conjecture suivante :

Conjecture A'. *Pour tout $I \subsetneq \Delta$ stable sous ϕ , le morphisme de restriction induit un isomorphisme :*

$$R\Gamma(Y(\dot{c}), \Lambda)^{U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), j_I'^* Rj_I^* \Lambda),$$

où j_I' désigne le composé $\bar{\pi}^{-1}(C_I) \hookrightarrow \bar{\pi}^{-1}(\bar{C}_I) \xrightarrow{i_I'} \bar{Y}(\dot{c})$.

L'équivalence entre les conjectures A et A' découle directement des lemmes (3.2.1) et (3.2.2). Remarquons que l'on s'est débarrassé de la compactification \bar{C}_I , et on se ramène à étudier la strate ouverte C_I .

(3.2.1) LEMME.— *Le morphisme de changement de base induit un isomorphisme*

$$R\Gamma(\bar{C}_I, i_I^* Rj_{I*}(\pi_* \Lambda)) \xrightarrow{\cong} R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(\bar{C}_I), i_I'^* Rj_I^* \Lambda)$$

compatible avec les morphismes de restriction.

Preuve : Notons que $\bar{\pi}$ est un morphisme fini, il résulte du théorème de changement de base pour les morphismes finis et l'invariance topologique du topos étale (cf. [SGA72, Exp. VIII Thm. 1.1]) que $i_I^* Rj_{I*}(\pi_* \Lambda) = \bar{\pi}_{I*} i_I'^* Rj_I^* \Lambda$. \square

(3.2.2) LEMME.— *Considérons la normalisation $\bar{Y}(\dot{c})$ et le diagramme suivant :*

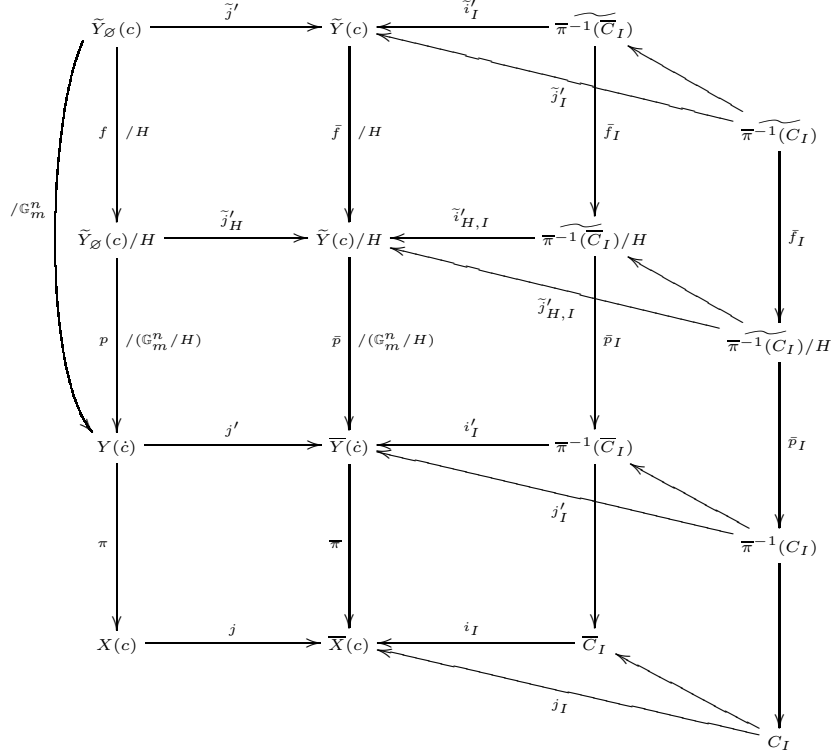
$$\begin{array}{ccc} Y(\dot{c}) & \xrightarrow{j'} & \bar{Y}(\dot{c}) \longleftarrow i_I' \bar{\pi}^{-1}(\bar{C}_I) \\ & & \swarrow j_I' \quad \uparrow \bar{\pi}^{-1}(C_I) \end{array}$$

Le morphisme canonique

$$i_{I,*}' i_I'^* Rj_I^* \Lambda \longrightarrow Rj_{I,*}' j_I'^* Rj_I^* \Lambda$$

est un isomorphisme.

Preuve : Rappelons la construction explicite de $\bar{Y}(\dot{c})$ dans [BR09].



Comme dans *loc. cit.* $\tilde{Y}(c)$ est une variété lisse, purement de dimension $2n$, munie d'une action de $\mathbf{T}^{cF} \times (\mathbb{G}_m)^n$, faisant de $\bar{X}(c)$ le quotient par cette action. L'application $\tilde{j}' : \tilde{Y}_\emptyset(c) \hookrightarrow \tilde{Y}(c)$ est une immersion ouverte dense, dont le complémentaire est un diviseur à croisements normaux (*cf.* (2.1.7)). Un argument similaire à l'étape 3 de la preuve du [Dat12, Thm. 2.2] nous fournit un isomorphisme :

$$(3.2.3) \quad \tilde{i}'_{I,*} \tilde{i}'_I^* R\tilde{j}'_I \Lambda \xrightarrow{\sim} R\tilde{j}'_{I,*} \tilde{j}'_I^* R\tilde{j}'_I \Lambda.$$

L'action du groupe $(\mathbb{G}_m)^n$ sur $\tilde{Y}(c)$ n'est pas libre en général et il existe un sous-groupe fini H (qui est noté $H_{\{1,\dots,n\}}$ dans *loc. cit.*) de \mathbb{G}_m^n tel que \mathbb{G}_m^n/H agisse librement sur $\tilde{Y}(c)/H$ ([BR09, Prop. 2.7 (a)]). Considérons le diagramme commu-

tatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{Y}_\emptyset(c) & \xrightarrow{\widetilde{j}'} & \widetilde{Y}(c) & \xleftarrow{\widetilde{i}'_I} & \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{C}_I) \\
\downarrow f / H & & \downarrow \bar{f} / H & & \downarrow \bar{f}_I \\
\widetilde{Y}_\emptyset(c)/H & \xrightarrow{\widetilde{j}'_H} & \widetilde{Y}(c)/H & \xleftarrow{\widetilde{i}'_{H,I}} & \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{C}_I)/H \\
& & & & \downarrow \bar{f}_I \\
& & & & \widetilde{\pi}^{-1}(C_I)/H
\end{array}$$

$\begin{array}{ccc} & \swarrow \widetilde{j}'_I & \\ & \searrow \widetilde{i}'_I & \\ & & \swarrow \widetilde{j}'_{H,I} \\ & & \searrow \widetilde{i}'_{H,I} \end{array}$

Le groupe fini H agit librement sur $\widetilde{Y}_\emptyset(c)$ ([BR09, Prop. 2.7 (b)]), donc f est un revêtement galoisien. Le faisceau étale $f_*\Lambda$ sur $\widetilde{Y}_\emptyset(c)/H$ est un faisceau de $\Lambda[H]$ -modules, et le morphisme d'adjonction induit un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} (f_*\Lambda)^H$. Notons R_H le foncteur dérivé du foncteur des H -invariants. Comme H est fini, prendre les H -invariants est une limite projective finie, donc commute avec les foncteurs pull-back. D'autre part, $R_H = R\mathrm{Hom}_{\Lambda[H]}(\Lambda, -)$ commute avec les images directes. On en déduit que

$$\widetilde{i}'_{H,I,*} \widetilde{i}'_{H,I}{}^* R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda = \widetilde{i}'_{H,I,*} \widetilde{i}'_{H,I}{}^* R\widetilde{j}'_{H,*} (f_*\Lambda)^H = R_H(\bar{f}_* \widetilde{i}'_{I,*} \widetilde{i}'_I{}^* R\widetilde{j}'_* \Lambda)$$

et

$$R\widetilde{j}'_{H,I,*} \widetilde{j}'_{H,I}{}^* R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda = R_H(\bar{f}_* R\widetilde{j}'_{I,*} \widetilde{j}'_I{}^* R\widetilde{j}'_* \Lambda).$$

En plus, le morphisme

$$\widetilde{i}'_{H,I,*} \widetilde{i}'_{H,I}{}^* R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda \rightarrow R\widetilde{j}'_{H,I,*} \widetilde{j}'_{H,I}{}^* R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda$$

s'identifie à

$$R_H \bar{f}_* (\widetilde{i}'_{I,*} \widetilde{i}'_I{}^* R\widetilde{j}'_* \Lambda \rightarrow R\widetilde{j}'_{I,*} \widetilde{j}'_I{}^* R\widetilde{j}'_* \Lambda).$$

D'après 3.2.3, on a donc

$$(3.2.4) \quad \widetilde{i}'_{H,I,*} \widetilde{i}'_{H,I}{}^* R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda \xrightarrow{\sim} R\widetilde{j}'_{H,I,*} \widetilde{j}'_{H,I}{}^* R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda$$

Considérons ensuite le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{Y}_\emptyset(c)/H & \xrightarrow{\widetilde{j}'_H} & \widetilde{Y}(c)/H & \xleftarrow{\widetilde{i}'_{H,I}} & \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{C}_I)/H \\
\downarrow p / (\mathbb{G}_m^n/H) & & \downarrow \bar{p} / (\mathbb{G}_m^n/H) & & \downarrow \bar{p}_I \\
Y(\dot{c}) & \xrightarrow{j'} & \overline{Y}(\dot{c}) & \xleftarrow{i'_I} & \pi^{-1}(\overline{C}_I) \\
& & & & \downarrow \bar{p}_I \\
& & & & \pi^{-1}(C_I)
\end{array}$$

$\begin{array}{ccc} & \swarrow \widetilde{j}'_{H,I} & \\ & \searrow \widetilde{j}'_{H,I} & \\ & & \end{array}$

Le morphisme \bar{p} est le quotient par l'action libre de $(\mathbb{G}_m)^n/H$, donc il est lisse. D'après le théorème de changement de base lisse et l'invariance topologique du topos étale ([SGA72, Exp. VIII]), on a

$$\bar{p}^*(i'_{I,*} i'^*_I Rj'_* \Lambda) = \widetilde{i}'_{H,I,*} \widetilde{i}'^*_{H,I} R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda$$

et

$$\bar{p}^*(Rj'_{I,*} j'^*_I Rj'_* \Lambda) = R\widetilde{j}'_{H,I,*} \widetilde{j}'^*_{H,I} R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda.$$

En plus, le morphisme

$$\widetilde{i}'_{H,I,*} \widetilde{i}'^*_{H,I} R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda \longrightarrow R\widetilde{j}'_{H,I,*} \widetilde{j}'^*_{H,I} R\widetilde{j}'_{H,*} \Lambda$$

s'identifie à

$$\bar{p}^*(i'_{I,*} i'^*_I Rj'_* \Lambda \longrightarrow Rj'_{I,*} j'^*_I Rj'_* \Lambda).$$

D'après 3.2.4, c'est un isomorphisme :

$$\bar{p}^*(i'_{I,*} i'^*_I Rj'_* \Lambda \xrightarrow{\sim} Rj'_{I,*} j'^*_I Rj'_* \Lambda).$$

En vertu de la surjectivité de \bar{p} , on en déduit que le morphisme suivant :

$$i'_{I,*} i'^*_I Rj'_* \Lambda \longrightarrow Rj'_{I,*} j'^*_I Rj'_* \Lambda$$

est un isomorphisme. □

(3.2.5) LEMME.— Soient $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$, et $\dot{c}_{\mathbf{G}} = (\dot{c}_{\mathbf{G}_1}, \dot{c}_{\mathbf{G}_2})$. Supposons que la conjecture A' soit vérifiée pour \mathbf{G}_1 et \mathbf{G}_2 , alors elle l'est aussi pour \mathbf{G} .

Preuve : Comme on a un isomorphisme $Y_{\mathbf{G}}(\dot{c}_{\mathbf{G}}) \cong Y_{\mathbf{G}_1}(\dot{c}_{\mathbf{G}_1}) \times Y_{\mathbf{G}_2}(\dot{c}_{\mathbf{G}_2})$ et idem pour la composante dans la compactification partielle, l'énoncé découle de la formule de Künneth. □

3.3 Réduction au cas de codimension 1

Dans cette partie, on démontre la conjecture A' sous certaines hypothèses sur le cas de codimension 1. Si $I \subset \Delta$ stable sous ϕ est tel que $|I/\phi| = |\Delta/\phi| - 1$, on dit que c'est *un cas de codimension 1*. Dans ce cas, $\dim X_{\mathbf{L}_I}(c_I) = \dim X(c) - 1$. On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse. *Pour toute composante de Levi F -stable \mathbf{L} d'un sous-groupe parabolique propre F -stable de \mathbf{G} , la conjecture A' est vraie pour tous les cas de codimension 1 de \mathbf{L} .*

Sous cette hypothèse, on démontre la conjecture A'. Autrement dit, la preuve pour les strates de codimension plus grande que un se ramène à celle pour les strates de codimension égale à un. La démonstration se fait par récurrence sur le rang semi-simple $\text{rg}_{ss}(\mathbf{G})$ de \mathbf{G} . Tout d'abord, le cas $\text{rg}_{ss}(\mathbf{G}) = 1$ découle de l'hypothèse sur le cas de codimension 1. Soit \mathbf{G} un groupe réductif connexe de rang semi-simple n . Supposons que la conjecture A' soit vraie pour tous les sous-groupes de Levi rationnels \mathbf{L} de \mathbf{G} tels que $\text{rg}_{ss}(\mathbf{L}) < n$. Soit J un sous-ensemble des racines simples Δ de \mathbf{G} stable sous ϕ . Par notre hypothèse sur le cas de codimension 1, on peut supposer que J est tel que $\text{rg}_{ss}(\mathbf{L}_J) \leq \text{rg}_{ss}(\mathbf{G}) - 2$. Choisissons alors un sous-ensemble $I \subset \Delta$ stable sous ϕ , contenant J , et $\text{rg}_{ss}(\mathbf{L}_I) = \text{rg}_{ss}(\mathbf{G}) - 1$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \bar{\pi}^{-1}(C_I) & & & \\
 & & & \swarrow j'_I & \downarrow i'_I & \searrow j_I{}^\circ & \\
 Y(\dot{c}) & \xrightarrow{j'} & \bar{Y}(\dot{c}) & \xleftarrow{i'_I} & \bar{\pi}^{-1}(\bar{C}_I) & \xleftarrow{i'_{J \subset I}} & \bar{\pi}^{-1}(\bar{C}_J) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow & & \downarrow \\
 X(c) & \longrightarrow & \bar{X}(c) & \longleftarrow & \bar{C}_I & \longleftarrow & \bar{C}_J
 \end{array}$$

(3.3.1) LEMME.— *Les inclusions naturelles*

$$\bar{\pi}^{-1}(C_I) \hookrightarrow \bar{\pi}^{-1}(\bar{C}_I) \xleftarrow{i'_{J \subset I}} \bar{\pi}^{-1}(\bar{C}_J).$$

induisent un isomorphisme :

$$R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), \Lambda)^{U_J/U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_J), i_{J \subset I}^* Rj_{I*} \Lambda|_{\bar{\pi}^{-1}(C_J)}).$$

Preuve : Notons c_I l'élément de Coxeter de \mathbf{L}_I défini dans 2.2. D'après (2.2.1), on a $C_I \cong X_{\mathbf{L}_I}(c_I)$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
Y_{\mathbf{L}_I}(\dot{c}_I) & \xrightarrow{j'_{\mathbf{L}_I}} & \bar{Y}_{\mathbf{L}_I}(\dot{c}_I) & \xleftarrow{i'_{\mathbf{L}_I, J}} & \bar{\pi}_{\mathbf{L}_I}^{-1}(C_J) \\
\downarrow \pi_{\mathbf{L}_I} & & \downarrow \bar{\pi}_{\mathbf{L}_I} & & \downarrow \\
C_I \cong X_{\mathbf{L}_I}(c_I) & \xrightarrow{j_{\mathbf{L}_I}} & \bar{X}_{\mathbf{L}_I}(c_I) & \xleftarrow{i_{\mathbf{L}_I, J}} & C_J \cong X_{\mathbf{L}_J}(c_J) \\
\swarrow i_{c_I} & \nearrow \bar{\pi} & \swarrow \bar{\pi} & \nearrow \bar{\pi} & \swarrow \\
\bar{\pi}^{-1}(C_I) & \xrightarrow{j_I^{\circ}} & \bar{\pi}^{-1}(\bar{C}_I) & \xleftarrow{i'_{J \subset I}} & \bar{\pi}^{-1}(C_J)
\end{array}$$

D'après la construction de Bonnafé et Rouquier ([BR09, Thm. 1.2 (d)]), il existe un morphisme canonique $i_{c_I} : Y_{\mathbf{L}_I}(\dot{c}_I) \rightarrow \bar{\pi}^{-1}(C_I)$ tel que $\bar{\pi}^{-1}(C_I)$ soit le quotient de $Y_{\mathbf{L}_I}(\dot{c}_I)$ par un sous-groupe N (qui est noté $N_{c_I}(Y_{c, c_I})$ dans *loc. cit.*). Par hypothèse de récurrence sur \mathbf{L}_I , on a un isomorphisme donné par le morphisme de restriction :

$$R\Gamma(Y_{\mathbf{L}_I}(\dot{c}_I), \Lambda)^{U_J/U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\bar{\pi}_{\mathbf{L}_I}^{-1}(C_J), i_{\mathbf{L}_I, J}^* Rj_{\mathbf{L}_I, *}^{\circ} \Lambda).$$

C'est équivalent à dire que le morphisme suivant induit par restriction est un isomorphisme

$$(3.3.2) \quad R\Gamma(C_I, \pi_{\mathbf{L}_I, *} \Lambda)^{U_J/U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(C_J, i_{\mathbf{L}_I, J}^* Rj_{\mathbf{L}_I, *} \pi_{\mathbf{L}_I, *} \Lambda).$$

D'autre part, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), \Lambda)^{U_J/U_I} & \longrightarrow & R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_J), i_{J \subset I}^* Rj_{I, *}^{\circ} \Lambda|_{\bar{\pi}^{-1}(C_J)}) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
R\Gamma(C_I, \bar{\pi}_*(\Lambda_{\bar{\pi}^{-1}(C_I)}))^{U_J/U_I} & \longrightarrow & R\Gamma(C_J, i_{\mathbf{L}_I, J}^* Rj_{\mathbf{L}_I, *} \bar{\pi}_* \Lambda)
\end{array}$$

Notons que $\Lambda_{\bar{\pi}^{-1}(C_I)} = (i_{c_I, *} \Lambda)^N$ et l'action de U_J/U_I commute avec celle de N , nous avons donc

$$\begin{aligned}
R\Gamma(C_I, \bar{\pi}_*(\Lambda_{\bar{\pi}^{-1}(C_I)}))^{U_J/U_I} &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(C_I, \bar{\pi}_*(i_{c_I, *} \Lambda)^N)^{U_J/U_I} \\
&\xrightarrow{\sim} R_N(R\Gamma(C_I, \pi_{\mathbf{L}_I, *} \Lambda)^{U_J/U_I}) \\
&\xrightarrow{\sim} R_N(R\Gamma(C_I, \pi_{\mathbf{L}_I, *} \Lambda)^{U_J/U_I}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R\Gamma(C_J, i_{\mathbf{L}_I, J}^* Rj_{\mathbf{L}_I, *} \bar{\pi}_* \Lambda) &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(C_J, i_{\mathbf{L}_I, J}^* Rj_{\mathbf{L}_I, *} (\bar{\pi}_*(i_{c_I, *} \Lambda)^N)) \\
&\xrightarrow{\sim} R_N(R\Gamma(C_J, i_{\mathbf{L}_I, J}^* Rj_{\mathbf{L}_I, *} \pi_{\mathbf{L}_I, *} \Lambda)).
\end{aligned}$$

Notons que les isomorphismes ci-dessus sont compatibles avec les morphismes de restriction. En appliquant le foncteur dérivé R_N à l'isomorphisme 3.3.2, on déduit un isomorphisme

$$R\Gamma(C_I, \bar{\pi}_*(\Lambda_{\bar{\pi}^{-1}(C_I)}))^{U_J/U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(C_J, i_{\mathbf{L}_I, J}^* Rj_{\mathbf{L}_I, *} \bar{\pi}_* \Lambda).$$

Donc un isomorphisme

$$R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), \Lambda)^{U_J/U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_J), i_{JCI}^* Rj_{I*}' \Lambda|_{\bar{\pi}^{-1}(C_J)}).$$

□

Revenons à la preuve de la conjecture A'. Considérons la compactification partielle $Y(\dot{c})^I = Y(\dot{c}) \amalg \bar{\pi}^{-1}(C_I)$. D'après [BR09, Thm. 1.2 (a)], $(Y(\dot{c})^I, \bar{\pi}^{-1}(C_I))$ est un couple lisse de codimension 1. Le théorème de pureté relative ([SGA73, Exp. XVI]) nous fournit un triangle distingué dans $D_c^b(\bar{\pi}^{-1}(C_I), \Lambda)$:

$$\Lambda \longrightarrow j_I^* Rj_{I*}' \Lambda \longrightarrow \Lambda(-1)[-1] \xrightarrow{+1}.$$

ainsi qu'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), \Lambda) & \longrightarrow & R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), j_I^* Rj_{I*}' \Lambda) & \longrightarrow & R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), \Lambda(-1)[-1]) \longrightarrow \dots \\ \text{res.} \downarrow & & \text{res.} \downarrow & & \text{res.} \downarrow \\ R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_J), i_{JCI}^* Rj_{I*}' \Lambda) & \rightarrow & R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_J), i_{JCI}^* Rj_{I*}' j_I^* Rj_{I*}' \Lambda) & \rightarrow & R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_J), i_{JCI}^* Rj_{I*}' \Lambda(-1)[-1]) \rightarrow \dots \end{array}$$

En vertu du lemme précédent, ceci induit un isomorphisme :

$$R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), j_I^* Rj_{I*}' \Lambda)^{U_J/U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_J), i_{JCI}^* Rj_{I*}' (j_I^* Rj_{I*}' \Lambda|_{\bar{\pi}^{-1}(C_I)}))$$

D'après le lemme (3.2.2), $i_J^* Rj_{I*}' \Lambda = i_{JCI}^* i_I^* Rj_{I*}' \Lambda = i_{JCI}^* Rj_{I*}' (j_I^* Rj_{I*}' \Lambda|_{\bar{\pi}^{-1}(C_I)})$. On en déduit que

$$\begin{aligned} R\Gamma(Y(\dot{c}), \Lambda)^{U_J} &= (R\Gamma(Y(\dot{c}), \Lambda)^{U_I})^{U_J/U_I} \\ &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_I), j_I^* Rj_{I*}' \Lambda)^{U_J/U_I} \\ &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(\bar{\pi}^{-1}(C_J), i_J^* Rj_{I*}' \Lambda). \end{aligned}$$

Ceci achève le raisonnement par récurrence.

4 Le cas où $\mathbf{G} = \text{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_q)$

Dans cette section, nous détaillons les constructions de la section 2 lorsque $\mathbf{G} = \text{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_q)$ le groupe linéaire de dimension d .

4.1 L'espace de Drinfeld sur un corps fini

(4.1.1) Soient $\mathbf{G} = \text{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et F l'endomorphisme de Frobenius standard $(a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^q)$. Via cette isogénie, \mathbf{G} admet une \mathbb{F}_q -structure déployée de sorte que \mathbf{G}^F , le groupe des points fixés par F , s'identifie à $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$. Notons de plus que

\mathbf{B} le sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_q)$ des matrices triangulaires supérieures, \mathbf{T} le tore maximal des matrices diagonales. Le système de racines Φ est de type A_{d-1} , et $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}\}$ la base de Φ associée à \mathbf{B} . On numérotera Δ de telle sorte que pour $i \in \{1, \dots, d-1\}$, le parabolique $\mathbf{P}_{\Delta \setminus \{\alpha_i\}}$ soit le stabilisateur d'un sous-espace de dimension i de $\overline{\mathbb{F}}_q^d$. Le groupe de Weyl W s'identifie alors au groupe symétrique \mathfrak{S}_d , et nous choisissons l'élément de Coxeter $c = (1, \dots, d) \in \mathfrak{S}_d$. Désormais, on notera $T_d := \mathbf{T}^{cF}$, et l'application $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \mapsto a_{11}$ nous fournit un isomorphisme $T_d \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^d}^\times$.

La variété projective \mathbf{G}/\mathbf{B} s'identifie à l'ensemble \mathcal{F} des drapeaux complets de l'espace vectoriel $\overline{\mathbb{F}}_q^d$:

$$\mathcal{F} = \{\{0\} = D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_d = \overline{\mathbb{F}}_q^d \mid \dim_{\overline{\mathbb{F}}_q} D_i = i\}.$$

En effet, \mathbf{G} agit transitivement sur \mathcal{F} et \mathbf{B} s'identifie au stabilisateur du drapeau canonique

$$\{0\} \subset \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{D}_{d-1} \subset \overline{\mathbb{F}}_q^d$$

où \mathfrak{D}_i est le sous-espace défini par $X_i = \dots = X_{d-1} = 0$, $\forall 1 \leq i \leq d-1$, et X_0, \dots, X_{d-1} désignent les coordonnées sous base canonique de l'espace vectoriel $\overline{\mathbb{F}}_q^d$. Via cette description, un drapeau D_\bullet appartient à $X(c)$ si et seulement si $D_i = D_1 \oplus F(D_1) \oplus \dots \oplus F^{i-1}(D_1)$ pour tout i (cf. [DL76, 2.2]). On obtient ainsi que $X(c)$ s'identifie à la sous-variété $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ définie, dans les coordonnées projectives $[X_0 : \dots : X_{d-1}]$, par la non-nullité du déterminant $\det((X_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1})$. Autrement dit, $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ peut s'exprimer comme le complémentaire de tous les hyperplans \mathbb{F}_q -rationnels dans $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Nous fixons \dot{c} l'élément dont l'action sur la base canonique $\{e_i\}_{1 \leq i \leq d}$ est donnée par $\dot{c}(e_i) = e_{i+1}$, $\forall 1 \leq i \leq d-1$ et $\dot{c}(e_d) = e_1$. La variété $Y(\dot{c})$ est finie étale sur $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ de groupe de Galois $T_d \cong \mathbb{F}_{q^d}^\times$. De plus, on peut identifier $Y(\dot{c})$ avec la sous-variété DL^{d-1} de l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d = \mathrm{Spec} \mathbb{F}_q[X_0, \dots, X_{d-1}]$ définie par l'équation $\det((X_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1})^{q-1} = (-1)^{d-1}$. En particulier, DL^{d-1} est une variété affine et lisse.

(4.1.2) On désigne $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ la compactification de $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ (cf. 2.1). Il est bien connu que $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ peut se construire par une suite d'éclatements successifs de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ (cf. [Ito05, 4.1]). Rappelons que si X est une variété et $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est un éclatement de X le long d'une sous-variété fermée V , pour une sous-variété fermée W non contenue dans V , le transformé strict $\tilde{W} \subset \tilde{X}$ de W s'identifie à l'adhérence de Zariski de $\pi^{-1}(W \setminus V)$ dans \tilde{X} .

LEMME.— *On peut obtenir $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ de la façon suivante : à partir de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$, on éclate tous ses points \mathbb{F}_q -rationnels, et puis on éclate le long des transformés stricts de toutes les droites \mathbb{F}_q -rationnelles, et puis on éclate le long des transformés stricts de tous les plans \mathbb{F}_q -rationnels et ainsi de suite.*

Preuve : Notons $Z_i \subset Y_0 := \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ la réunion de toutes les sous-variétés linéaires \mathbb{F}_q -rationnelles de dimension i , $\forall i \in \{0, \dots, d-2\}$. Posons Y_1 l'éclatement de Y_0 le long de Z_0 , et $Z_i^{(1)}$ le transformé strict de Z_i dans Y_1 pour $i \geq 1$. Posons Y_2 l'éclatement de Y_1 le long de $Z_1^{(1)}$, et $Z_i^{(2)}$ le transformé strict de $Z_i^{(1)}$ pour $i \geq 2$. Construisons les variétés projectives Y_k et $Z_i^{(k)}$ par récurrence. Supposons que Y_{k-1} et $Z_i^{(k-1)}$ soient construites, posons $p_k : Y_k \rightarrow Y_{k-1}$ l'éclatement de Y_{k-1} le long de $Z_{k-1}^{(k-1)}$, et $Z_i^{(k)}$ le transformé strict de $Z_i^{(k-1)}$ dans Y_k . Notons que pour $j \leq k$, $Z_j^{(k)}$ est une union disjointe de ses composantes irréductibles. Finalement, on obtient une variété projective Y_{d-2} et un morphisme $f := p_1 \circ \dots \circ p_{d-2} : Y_{d-2} \rightarrow Y_0$. Autrement dit, on a une suite d'éclatements :

$$Y_{d-2} \xrightarrow{p_{d-2}} Y_{d-3} \xrightarrow{p_{d-3}} \dots \xrightarrow{p_2} Y_1 \xrightarrow{p_1} Y_0.$$

Notons $X(c) := \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$, et $\overline{X}(c) := \overline{\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}} = X(c) \coprod (\bigcup_{1 \leq k \leq d-1} \overline{X(c_k)})$, où $c_k = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{k-1}} s_{\alpha_{k+1}} \dots s_{\alpha_{d-1}}$. On rappelle que

$$\overline{X}(c) := \left\{ (g_1 \mathbf{B}, \dots, g_d \mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^d \mid g_d \mathbf{B} = F(g_1) \mathbf{B}, \right. \\ \left. g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbf{B} s_{\alpha_i} \mathbf{B} \cup \mathbf{B}, \forall 1 \leq i \leq d-1 \right\}$$

est une sous-variété projective de $(\mathbf{G}/\mathbf{B})^d$, et que $\overline{X}(c) \setminus X(c)$ est une réunion des sous-variétés projectives

$$\overline{X(c_k)} = \left\{ \mathbf{g} \in \overline{X}(c) \mid g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbf{B} s_{\alpha_i} \mathbf{B} \cup \mathbf{B} \forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \right. \\ \left. g_k^{-1} g_{k+1} \in \mathbf{B}, g_j^{-1} g_{j+1} \in \mathbf{B} s_{\alpha_j} \mathbf{B} \cup \mathbf{B} \forall j \in \{k+1, \dots, d-1\} \right\}$$

Notons pour $i \geq 1$, $\mathfrak{D}_i = \{X_j = \dots = X_{d-1} = 0\} \subset \mathbb{P}^{d-1}$, et définissons un morphisme

$$\phi_0 : \overline{X}(c) \rightarrow Y_0 \\ \mathbf{g} := (g_1 \mathbf{B}, \dots, g_d \mathbf{B}) \mapsto g_1 \cdot \mathfrak{D}_1$$

C'est un morphisme projectif birationnel $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant induisant un isomorphisme sur $X(c) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. L'image réciproque

$$\phi_0^{-1}(\mathfrak{D}_1) = \{\mathbf{g} \in \overline{X(c_1)} \mid g_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \text{ avec } a_{11} \neq 0, \text{ et } a_{i,1} = 0 \forall i \geq 2\}$$

est une composante irréductible de $\overline{X(c_1)}$, donc un diviseur de $\overline{X}(c)$. Les \mathbb{F}_q -points rationnels de \mathbb{P}^{d-1} sont conjugués sous l'action de $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{F}_q)$, et leurs images inverses sous ϕ_0 constituent un diviseur de $\overline{X}(c)$. D'après la propriété universelle

d'éclatement [Har77, II 7.14] et le fait que ϕ_0 est $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant, il existe un unique morphisme projectif $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant $\phi_1 : \overline{X}(c) \rightarrow Y_1$ tel que $\phi_0 = p_1 \circ \phi_1$ et $\phi_0^{-1}(Z_0) = \overline{X}(c_1)$. Notons \mathfrak{D}_2° le complémentaire dans \mathfrak{D}_2 de tous ses points rationnels, et $\mathfrak{D}_2^{\circ(1)}$ (resp. $\mathfrak{D}_2^{(1)}$) le transformé strict de \mathfrak{D}_2° (resp. \mathfrak{D}_2) dans Y_1 . Alors on a

$$\phi_1^{-1}(\mathfrak{D}_2^{\circ(1)}) = \phi_0^{-1}(\mathfrak{D}_2^\circ) = \{\mathbf{g} \in \overline{X}(c_2) \mid g_1 = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \text{ avec } a_{11}, a_{21} \text{ } \mathbb{F}_q\text{-linéairement indépendants, et } a_{i1} = 0 \forall i \in \{3, \dots, d\}\}.$$

De plus, sous ces conditions, on a $a_{ij} = 0$ lorsque $3 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq 2$. On en déduit un isomorphisme (cf. (4.1.4))

$$\phi_1^{-1}(\mathfrak{D}_2^{\circ(1)}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^1 \times \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-3}.$$

Ceci entraîne que $\phi_1^{-1}(\mathfrak{D}_2^{(1)})$ est une composante irréductible de $\overline{X}(c_2)$, donc $\phi_1^{-1}(Z_1^{(1)}) = \overline{X}(c_2)$. De plus, on a $\phi_1^{-1}(Z_0^{(1)} \cap Z_1^{(1)}) = \phi_1^{-1}(Z_0^{(1)}) \cap \phi_1^{-1}(Z_1^{(1)}) = \overline{X}(c_1) \cap \overline{X}(c_2)$.

Par récurrence, construisons un morphisme projectif birationnel $\phi_k : \overline{X}(c) \rightarrow Y_k$ pour chaque $k \leq d - 2$. Supposons que ϕ_{k-1} soit construit. Notons \mathfrak{D}_k° le complémentaire dans \mathfrak{D}_k de la réunion de tous ses sous-espaces linéaires rationnels propres, et $\mathfrak{D}_k^{\circ(k-1)}$ (resp. $\mathfrak{D}_k^{(k-1)}$) le transformé strict de \mathfrak{D}_k° (resp. \mathfrak{D}_k) dans Y_{k-1} . Le morphisme ϕ_{k-1} induit bien sûr un isomorphisme entre \mathfrak{D}_k° et $\mathfrak{D}_k^{\circ(k-1)}$. Comme \mathfrak{D}_k est de dimension $k - 1$, $\mathfrak{D}_k^{(k-1)}$ est une composante irréductible de $Z_{k-1}^{(k-1)}$. Alors on a

$$\phi_{k-1}^{-1}(\mathfrak{D}_k^{\circ(k-1)}) = \phi_0^{-1}(\mathfrak{D}_k^\circ) = \{\mathbf{g} \in \overline{X}(c_k) \mid g_1 = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \text{ avec } a_{11}, \dots, a_{k1} \text{ } \mathbb{F}_q\text{-linéairement indépendants, et } a_{i1} = 0 \forall i \in \{k+1, \dots, d\}\}.$$

De plus, sous ces conditions, on a $a_{ij} = 0$ lorsque $k + 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq k$. On en déduit un isomorphisme (cf. (4.1.4))

$$\phi_{k-1}^{-1}(\mathfrak{D}_k^{\circ(k-1)}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{k-1} \times \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1-k}.$$

Ceci entraîne que $\phi_{k-1}^{-1}(\mathfrak{D}_k^{(k-1)})$ est une composante irréductible de $\overline{X}(c_k)$, donc un diviseur irréductible. Par la $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariance de $Z_{k-1}^{(k-1)}$, on sait que $\phi_{k-1}^{-1}(Z_{k-1}^{(k-1)}) = \overline{X}(c_k)$. En vertu de la propriété universelle d'éclatement, il existe un unique morphisme projectif birationnel $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant $\phi_k : \overline{X}(c) \rightarrow Y_k$

qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{X}(c) & \xrightarrow{\phi_k} & Y_k \\
& \searrow \phi_{k-1} & \downarrow p_k \\
& & Y_{k-1} \\
& \searrow \phi_0 & \downarrow p_{k-1} \\
& & \vdots \\
& & \downarrow p_1 \\
& & Y_0
\end{array}$$

De la même manière, on sait que $\phi_k^{-1}(Z_k^{(k)}) = \overline{X}(c_{k+1})$, et pour $0 \leq i_1, \dots, i_n \leq k$

$$\phi_k^{-1}(Z_{i_1}^{(k)} \cap \dots \cap Z_{i_n}^{(k)}) = \phi_k^{-1}(Z_{i_1}^{(k)}) \cap \dots \cap \phi_k^{-1}(Z_{i_n}^{(k)}) = \overline{X}(c_{i_1+1}) \cap \dots \cap \overline{X}(c_{i_n+1}).$$

Finalement, on obtient un morphisme projectif birationnel $\phi_{d-2} : \overline{X}(c) \rightarrow Y_{d-2}$ vérifiant que

$$(4.1.3) \quad \phi_{d-2}^{-1}\left(\bigcap_{i \in S} Z_i^{(d-2)}\right) = \bigcap_{i \in S} \phi_{d-2}^{-1}(Z_i^{(d-2)}) = \bigcap_{i \in S} \overline{X}(c_{i+1}),$$

pour n'importe quel sous-ensemble S de $\{0, \dots, d-2\}$.

Montrons maintenant que ϕ_{d-2} est un isomorphisme. Notons tout d'abord que ϕ_{d-2} est un éclatement d'après [Har77, II 7.17]. Supposons que ϕ_{d-2} soit un éclatement de Y_{d-2} le long d'un sous-schéma fermé irréductible $Z \subset Y_{d-2} \setminus f^{-1}(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}) = \bigcup Z_i^{(d-2)}$ de codimension ≥ 2 , où f est le composé d'éclatements $Y_{d-2} \rightarrow Y_0$. On peut alors supposer que Z est contenu dans certain $Z_i^{(d-2)}$. D'après 4.1.3, Z n'est pas contenu dans l'intersection de $Z_i^{(d-2)}$ avec les autres composantes $Z_j^{(d-2)}$. D'autre part, par construction, on sait que $\phi_{d-2}|_{\overline{X}(c_{i+1})} : \overline{X}(c_{i+1}) \rightarrow Z_i^{(d-2)}$ est un morphisme birationnel. Or, le nerf de la stratification de $\overline{X}(c) \setminus X(c)$ et celui de $Y_{d-2} \setminus f^{-1}(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1})$ coïncident avec l'immeuble de Tits associé à $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$. Il s'ensuit que un tel sous-schéma Z n'existe pas. Donc ϕ_{d-2} est un isomorphisme. Ceci termine la preuve du lemme. \square

(4.1.4) Lorsque I est un sous-ensemble de Δ tel que $\Delta \setminus I = \{\alpha_i\}$, \mathbf{L}_I s'identifie au produit $\mathrm{GL}_i(\overline{\mathbb{F}}_q) \times \mathrm{GL}_{d-i}(\overline{\mathbb{F}}_q)$, et \mathbf{B}_I s'identifie au produit $\mathbf{B}_i \times \mathbf{B}_{d-i}$ des sous-groupes de Borel standards de $\mathrm{GL}_i(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et $\mathrm{GL}_{d-i}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ respectivement. Le groupe de Weyl $W_{\mathbf{L}_I}$ isomorphe au produit $W_{\mathrm{GL}_i(\overline{\mathbb{F}}_q)} \times W_{\mathrm{GL}_{d-i}(\overline{\mathbb{F}}_q)}$, de sorte qu'il existe des éléments $\overline{s}_{\alpha_k} \in W_{\mathrm{GL}_i(\overline{\mathbb{F}}_q)}$ pour $1 \leq k \leq i-1$ et $\overline{s}_{\alpha_l} \in W_{\mathrm{GL}_{d-i}(\overline{\mathbb{F}}_q)}$ pour $i+1 \leq l \leq d-1$, tels que via cet isomorphisme s_{α_k} s'identifie à $(\overline{s}_{\alpha_k}, 1)$ pour $1 \leq k \leq i-1$ et s_{α_l}

s'identifie à $(1, \bar{s}_{\alpha_l})$ pour $i + 1 \leq l \leq d - 1$. Notons $c_1(i) := \bar{s}_{\alpha_1} \cdots \bar{s}_{\alpha_{i-1}}$ (resp. $c_2(d - i) := \bar{s}_{\alpha_{i+1}} \cdots \bar{s}_{\alpha_{d-1}}$) l'élément de Coxeter $(1, \dots, i) \in \mathfrak{S}_i = W_{\mathrm{GL}_i(\overline{\mathbb{F}}_q)}$ (resp. $(1, \dots, d - i) \in \mathfrak{S}_{d-i} = W_{\mathrm{GL}_{d-i}(\overline{\mathbb{F}}_q)}$).

Désormais, on identifiera $X_{\mathbf{L}_I}(c_I)$ avec $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{L}_I}(c_I) &= \{g\mathbf{B}_I \in \mathbf{L}_I/\mathbf{B}_I \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}_I c_I \mathbf{B}_I\} \\ &= \left\{ (g_1, g_2) \in \mathrm{GL}_i/\mathbf{B}_i \times \mathrm{GL}_{d-i}/\mathbf{B}_{d-i} \mid g_1^{-1}F(g_1) \in \mathbf{B}_i c_1(i) \mathbf{B}_i, \right. \\ &\quad \left. g_2^{-1}F(g_2) \in \mathbf{B}_{d-i} c_2(d-i) \mathbf{B}_{d-i} \right\} \\ &\xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i} \end{aligned}$$

De même, on a une description analogue

$$Y_{\mathbf{L}_I}(\dot{c}_I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{DL}^{i-1} \times \mathrm{DL}^{d-1-i}.$$

REMARQUE.— Soient $I \subset \Delta$ et $I = \Delta \setminus \{\alpha_i\}$ pour une racine simple $\alpha_i \in \Delta$. La sous-variété ouverte $X(c_i)$ du diviseur $\overline{X}(c_i)$ est une union disjointe de composantes irréductibles isomorphes à $X_{\mathbf{L}_I}(c_I)$, cf. (2.2.1). On notera C_I la composante irréductible fixée par U_I . En vertu du lemme (4.1.2), on obtient que \overline{C}_I est le transformé strict de l'espace rationnel \mathfrak{D}_i dans $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$.

4.2 Quotients de Lusztig explicites

Nous calculons explicitement, dans le cas de GL_d , la construction de Lusztig [Lus77, 2.7, 2.10] que nous avons rappelée dans 2.2. En particulier, nous démontrons la propriété suivante (voir (4.2.8) pour l'énoncé plus précis) :

THÉORÈME.— Soient $I = \Delta \setminus \{\alpha_i\}$ pour une racine simple $\alpha_i \in \Delta$, et C_I la composante irréductible de $X(c_i)$ fixée par U_I . Notons $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1, I} := \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \amalg C_I \subset \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Alors, il existe un isomorphisme

$$U_I \backslash \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1, I} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}.$$

(4.2.1) Soit \mathbf{U} le sous groupe de matrices unipotentes triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_q)$,

$$\mathbf{U} = \left\{ u = (u_d, u_{d-1}, \dots, u_1) \mid u_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u_i = \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ \vdots \\ u_{d-i,i} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq d-1 \right\}.$$

D'après la condition 2.2.3, pour que un élément $u \in \mathbf{U}$ appartienne à $X'(c)$, il faut et il suffit qu'il existe $v_i \in \overline{\mathbb{F}}_q$, $1 \leq i \leq d-1$ non nuls tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} v_i = u_{d-i,i}^q - u_{d-i,i} \neq 0 \\ F(u_i) - u_i = v_i \cdot u_{i+1} \end{cases}$$

Il est évident que pour un tel élément u , les v_i , u_i et donc u lui-même sont déterminés complètement par sa dernière colonne u_1 .

LEMME.— *L'inverse de l'isomorphisme L dans (2.2.4) (b) est donné par*

$$\Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1} \xrightarrow{\sim} X'(c)$$

$$(x_0 := \frac{X_0}{X_{d-1}}, \dots, x_{d-2} := \frac{X_{d-2}}{X_{d-1}}) \mapsto u = (u_d, u_{d-1}, \dots, u_1), \text{ où } u_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{d-2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et les } u_i, i \geq 2$$

$$\text{sont donnés par récurrence } \begin{cases} u_{i+1} = \frac{1}{v_i}(F(u_i) - u_i) \\ v_i = u_{d-i,i}^q - u_{d-i,i}. \end{cases}$$

Preuve : En sachant que $L : X'(c) \rightarrow \Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $\forall u = (u_{ij}) \in X'(c)$, $L(u) = (u_{11}, \dots, u_{d-1,1})$. En effet, $w_\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$, donc la première colonne de $u \cdot w_\Delta$ est égale à $(u_{11}, \dots, u_{d-1,1})^t$.

On en déduit l'énoncé du lemme. \square

Nous pouvons reformuler le théorème (2.2.4) de la façon suivante :

(4.2.2) COROLLAIRE.— (a) Le morphisme

$$\begin{aligned} X'(c) &\longrightarrow \mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m \text{ (} d-1 \text{ fois)} \\ u = (u_{k,l}) &\mapsto (v_{d-1}, \dots, v_1) \end{aligned}$$

où $v_i = u_{d-i,i}^q - u_{d-i,i}$ induit un isomorphisme $U \backslash X'(c) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_m)^{d-1}$.

(b) Soient $I \subset \Delta$ et $\Delta \setminus I = \{\alpha_i\}$. Alors, l'application

$$\begin{aligned} U_I \backslash X'(c) &\longrightarrow \Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1-i} \\ u = (u_{k,l}) \pmod{U_I} &\mapsto \left((u_{1,d+1-i}, \dots, u_{i-1,d+1-i}), v_{d-i}, (u_{i+1,1}, \dots, u_{d-1,1}) \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En plus, son composé avec l'isomorphisme $\Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1} \xrightarrow{\sim} X'(c)$ induit un isomorphisme

$$(4.2.3) \quad U_I \backslash \Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1-i}.$$

(4.2.4) Soit $I \subset \Delta$ tel que $\Delta \setminus I = \{\alpha_i\}$. On notera ρ_I le morphisme donné par le composé :

$$\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \twoheadrightarrow U_I \setminus \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}.$$

Rappelons que C_I est la composante irréductible de $X(c_i)$ fixée par U_I . Dans la suite, nous étudions $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1, I} := \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \amalg C_I \subset \overline{X}(c)$ une compactification partielle de $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ associée à I , et nous montrons que le morphisme ρ_I se prolonge à $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1, I}$ induisant un isomorphisme $U_I \setminus \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1, I} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}$ (voir (4.2.8)). Cette compactification sera utilisée dans la démonstration du théorème (5.1.1).

Sous les coordonnées projectives $[X_0 : X_1 : \dots : X_{d-1}]$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$, pour $1 \leq j \leq d-1$, $\mathbf{P}_{\Delta \setminus \{\alpha_j\}}$ est le stabilisateur du sous-espace \mathfrak{D}_j dans $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Notons que $\overline{C}_{\Delta \setminus \{\alpha_j\}}$ est le transformé strict de \mathfrak{D}_j dans $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Soit Z la réunion des transformés stricts de tous les sous-espaces \mathbb{F}_q -rationnels sauf celui de \mathfrak{D}_j , $\forall 1 \leq j \leq d-1$. Considérons la sous-variété ouverte $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \setminus Z$ de $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ qui est en fait la réunion de $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ avec les composantes $C_{\Delta \setminus \{\alpha_i\}}$ pour tout $\alpha_i \in \Delta$.

(4.2.5) LEMME.— *La variété $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \setminus Z$ est une sous-variété affine ouverte d'un espace affine \mathbb{A}^{d-1} de coordonnées affines $(y_1, \dots, y_{d-1}) := (\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_{d-1}}{X_{d-2}})$. De plus, la composante $C_{\Delta \setminus \{\alpha_i\}}$ est contenue dans l'hyperplan $y_i = 0$.*

Preuve : Considérons la fonction

$$\delta_d(y_1, \dots, y_{d-1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_1 \cdots y_{d-1} \\ 1 & y_1^q & y_2^q & \cdots & (y_1 \cdots y_{d-1})^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_1^{q^{d-1}} & y_2^{q^{d-1}} & \cdots & (y_1 \cdots y_{d-1})^{q^{d-1}} \end{pmatrix}^{q-1}$$

sur $\mathbb{A}^{d-1} := \text{Spec}(\mathbb{F}_q[y_1, \dots, y_{d-1}])$. Le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^{d-1} &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \\ (y_1, \dots, y_{d-1}) &\longmapsto [1 : y_1 : y_1 y_2 : \cdots : y_1 \cdots y_{d-1}] \end{aligned}$$

induit un isomorphisme $\mathbb{A}_{\emptyset}^{d-1} := \{(y_1, \dots, y_{d-1}) \in \mathbb{A}^{d-1} \mid \delta_d(y_1, \dots, y_{d-1}) \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, d-1\}$ fixé, on a une factorisation

$$\begin{aligned} \delta_d(y_1, \dots, y_{d-1}) &= C \prod_{(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}} (a_0 + a_1 y_1 + \cdots + a_{d-1} y_1 \cdots y_{d-1}) \\ &= C \cdot (y_1 \cdots y_i)^{q^{d-i}-1} \cdot \delta_{d-i}(y_{i+1}, \dots, y_{d-1}) \cdot \delta_{d,i}(y_1, \dots, y_{d-1}), \end{aligned}$$

où C est une constante, et $\delta_{d,i}(y_1, \dots, y_{d-1})$ est le produit de $a_0 + a_1 y_1 + \cdots + a_{d-1} y_1 \cdots y_{d-1}$ sur tous les $(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}$ tels que $a_j \neq 0$ pour certain $j < i$. Il est clair que $\delta_{d,i} \equiv \delta_i(y_1, \dots, y_{i-1})^{q^{d-i}} \pmod{y_i}$.

Considérons $\mathbb{A}^{d-1,i}$ la sous-variété ouverte de \mathbb{A}^{d-1} définie par

$$\{(y_1, \dots, y_{d-1}) \in \mathbb{A}^{d-1} \mid \frac{\delta_d(y_1, \dots, y_{d-1})}{y_i^{q^{d-i-1}}} \neq 0\}.$$

Il résulte de la factorisation de δ_d ci-dessus que $\mathbb{A}^{d-1,i} = \mathbb{A}_{\emptyset}^{d-1} \coprod A_i$, où $A_i = \{(y_1, \dots, y_{d-1}) \mid y_i = 0, \delta_{d-i}(y_{i+1}, \dots, y_{d-1}) \cdot \delta_i(y_1, \dots, y_{i-1}) \neq 0\}$. Définissons une fonction f comme le produit de $a_0 + a_1 y_1 + \dots + a_{d-1} y_1 \cdots y_{d-1}$ sur tous les $(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}$ tels qu'il existe au moins deux a_j non nuls. Alors la sous-variété ouverte $D(f)$ de \mathbb{A}^{d-1} qui est le complémentaire de $\{f = 0\}$ est affine ; il s'ensuit que $D(f) = \mathbb{A}^{d-1,1} \cup \dots \cup \mathbb{A}^{d-1,d-1}$.

Considérons ensuite la restriction du morphisme φ à $D(f)$, notée encore $\varphi : D(f) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Par définition, l'image réciproque de \mathfrak{D}_1 sous φ s'identifie à A_1 , et l'image réciproque des autres points rationnels est vide. Comme A_1 est un diviseur de $D(f)$, il résulte de la propriété universelle d'éclatement qu'il existe un morphisme $\varphi_1 : D(f) \rightarrow Y_1$, où Y_1 est l'éclatement de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ le long de tous ses points rationnels, cf. (4.1.2). De plus, φ_1 induit un isomorphisme entre A_1 et le diviseur exceptionnel le long de \mathfrak{D}_1 privé les transformés stricts de toutes les droites rationnelles sauf celui de \mathfrak{D}_2 . De la même manière, il existe un morphisme $\varphi_2 : D(f) \rightarrow Y_2$ qui induit un isomorphisme entre A_2 et le diviseur exceptionnel le long de \mathfrak{D}_2 privé le transformé strict de tous les plans rationnels sauf celui de \mathfrak{D}_3 . Finalement, par récurrence, on obtient un morphisme $\varphi_{d-2} : D(f) \rightarrow Y_{d-2} = \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ de l'image $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \setminus Z$. En vertu du « main theorem » de Zariski [Liu02, 4.4], φ_{d-2} induit un isomorphisme $D(f) \xrightarrow{\sim} \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \setminus Z$. □

REMARQUE.— En fait, les coordonnées affines (y_1, \dots, y_{d-1}) comme ci-dessus viennent d'un calcul direct de l'éclatement dans le lemme (4.1.2).

(4.2.6) LEMME.— *Sous les coordonnées (y_1, \dots, y_{d-1}) , le morphisme $\rho_I : \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}$ est donné par*

$$(y_1, \dots, y_{d-1}) \mapsto \left(\left(\frac{a_{1,d-i}}{(y_1 \cdots y_{i-1})^{q^{d-i}}}, \dots, \frac{a_{i-1,d-i}}{y_{i-1}^{q^{d-i}}} \right), v_{d-i}, \left(\frac{1}{y_{i+1} \cdots y_{d-1}}, \dots, \frac{1}{y_{d-1}} \right) \right),$$

où $a_{jk} \in \mathbb{F}_q(y_1, \dots, y_{d-1})$ est donné par récurrence :

$$\begin{cases} a_{j1} = \frac{1 - (y_j \cdots y_{d-1})^{q-1}}{1 - y_{d-1}^{q-1}}, & 1 \leq j \leq d-2 ; \\ a_{jk} = \frac{a_{j,k-1}^q - (y_j \cdots y_{d-k})^{q^k - q^{k-1}} a_{j,k-1}}{a_{d-k,k-1}^q - y_{d-k}^{q^k - q^{k-1}} a_{d-k,k-1}}, & 1 \leq j \leq d-k-1, \end{cases}$$

$$\text{et } v_{d-i} = \frac{a_{i,d-1-i}^q - y_i^{q^{d-i} - q^{d-1-i}} a_{i,d-1-i}}{y_i^{q^{d-i}}}.$$

Preuve : Calculons tout d'abord la matrice unipotente $u \in X'(c)$ dans (4.2.1). Écrivons un point $(x_0, \dots, x_{d-2}) \in \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ sous coordonnées (y_1, \dots, y_{d-1}) de $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ (cf. (4.2.5)),

$$x_j = \frac{1}{y_{j+1} \cdots y_{d-1}}, \quad 0 \leq j \leq d-2.$$

D'après le lemme (4.2.1), on a

$$u_{j1} = x_{j-1} = \frac{1}{y_j \cdots y_{d-1}}, \quad 1 \leq j \leq d-1 \text{ et } v_1 = u_{d-1,1}^q - u_{d-1,1} = \frac{1 - y_{d-1}^{q-1}}{y_{d-1}^q}.$$

On en déduit que, pour $1 \leq j \leq d-2$,

$$u_{j2} = \frac{u_{j1}^q - u_{j1}}{v_1} = \frac{a_{j1}}{(y_j \cdots y_{d-2})^q}, \quad \text{où } a_{j1} = \frac{1 - (y_j \cdots y_{d-1})^{q-1}}{1 - y_{d-1}^{q-1}}$$

et

$$v_2 = u_{d-2,2}^q - u_{d-2,2} = \frac{a_{d-2,1}^q - y_{d-2}^{q^2-q} a_{d-2,1}}{y_{d-2}^{q^2}}.$$

Alors, pour $1 \leq j \leq d-3$, on a

$$u_{j3} = \frac{u_{j2}^q - u_{j2}}{v_2} = \frac{a_{j2}}{(y_j \cdots y_{d-3})^{q^2}}, \quad \text{où } a_{j2} = \frac{a_{j,1}^q - (y_j \cdots y_{d-2})^{q^2-q} a_{j1}}{a_{d-2,1}^q - y_{d-2}^{q^2-q} a_{d-2,1}}.$$

Par récurrence, posons

$$a_{jk} = \frac{a_{j,k-1}^q - (y_j \cdots y_{d-k})^{q^k - q^{k-1}} a_{j,k-1}}{a_{d-k,k-1}^q - y_{d-k}^{q^k - q^{k-1}} a_{d-k,k-1}}, \quad 1 \leq j \leq d-k-1.$$

On a donc

$$v_k = \frac{a_{d-k,k-1}^q - y_{d-k}^{q^k - q^{k-1}} a_{d-k,k-1}}{y_{d-k}^{q^k}} \text{ et } u_{j,k+1} = \frac{a_{jk}}{(y_j \cdots y_{d-1-k})^{q^k}}.$$

□

(4.2.7) LEMME.— Pour $j \in \{1, \dots, i-1\}$, $a_{j,d-i} = \frac{1+f(y_j, \dots, y_{d-1})}{1+g(y_j, \dots, y_{d-1})} \in \mathbb{F}_q(y_j, \dots, y_{d-1})$, où $f(y_j, \dots, y_{d-1})$ et $g(y_j, \dots, y_{d-1})$ appartiennent à $(y_j, \dots, y_{d-1})\mathbb{F}_q[y_j, \dots, y_{d-1}]$. En particulier, $\text{ord}_{y_n}(a_{j,d-i}) = 0$, où ord_{y_n} est la valuation de $\mathbb{F}_q(y_j, \dots, y_{d-1})$ définie par y_n telle que $\text{ord}_{y_n}(y_n) = 1$, $j \leq n \leq d-1$. De plus, $a_{j,d-i} \equiv 1 \pmod{y_i}$, $v_{d-i} \in \mathbb{F}_q(y_i, \dots, y_{d-1})$, et $\text{ord}_{y_i}(v_{d-i}) = -q^{d-i} < 0$.

Preuve : Démontrons-le par récurrence. Pour $i = d - 1$, $a_{j1} = \frac{1 - (y_j \cdots y_{d-1})^{q-1}}{1 - y_{d-1}^{q-1}}$ et $v_1 = \frac{1 - y_{d-1}^{q-1}}{y_{d-1}^q}$. Soit $i = k$, et supposons que l'énoncé soit vrai pour $i \in \{k+1, \dots, d-1\}$. Par définition, on a

$$a_{j,d-k} = \frac{a_{j,d-1-k}^q - (y_j \cdots y_k)^{q^{d-k} - q^{d-1-k}} a_{j,d-1-k}}{a_{k,d-1-k}^q - y_k^{q^{d-k} - q^{d-1-k}} a_{k,d-1-k}}.$$

Notons que par récurrence, $a_{j,d-1-k}$ et $a_{k,d-1-k}$ appartiennent à $\mathbb{F}_q(y_j, \dots, y_{d-1})$, et ils sont de la forme $\frac{1+f}{1+g}$ où $f, g \in (y_j, \dots, y_{d-1})\mathbb{F}_q[y_j, \dots, y_{d-1}]$. On voit immédiatement qu'il existe $\tilde{f}, \tilde{g} \in (y_j, \dots, y_{d-1})\mathbb{F}_q[y_j, \dots, y_{d-1}]$ tels que $a_{j,d-k} = \frac{1+\tilde{f}}{1+\tilde{g}} \in \mathbb{F}_q(y_j, \dots, y_{d-1})$, donc $\text{ord}_{y_n}(a_{j,d-i}) = 0$, $j \leq n \leq d-1$. Calculons la valeur $a_{j,d-k}$ modulo y_k . Nous avons

$$\begin{aligned} a_{j,d-k} &= \frac{a_{j,d-1-k}^q - (y_j \cdots y_k)^{q^{d-k} - q^{d-1-k}} a_{j,d-1-k}}{a_{k,d-1-k}^q - y_k^{q^{d-k} - q^{d-1-k}} a_{k,d-1-k}} \\ &\equiv \left(\frac{a_{j,d-1-k}}{a_{k,d-1-k}} \right)^q \pmod{y_k}. \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \frac{a_{j,d-1-k}}{a_{k,d-1-k}} &= \frac{a_{j,d-2-k}^q - (y_j \cdots y_{k+1})^{q^{d-1-k} - q^{d-2-k}} a_{j,d-2-k}}{a_{k+1,d-2-k}^q - y_{k+1}^{q^{d-1-k} - q^{d-2-k}} a_{k+1,d-2-k}} \cdot \frac{a_{k+1,d-2-k}^q - y_{k+1}^{q^{d-1-k} - q^{d-2-k}} a_{k+1,d-2-k}}{a_{k,d-2-k}^q - (y_k y_{k+1})^{q^{d-1-k} - q^{d-2-k}} a_{k,d-2-k}} \\ &\equiv \left(\frac{a_{j,d-2-k}}{a_{k,d-2-k}} \right)^q \pmod{y_k} \equiv \dots \equiv \left(\frac{a_{j1}}{a_{i1}} \right)^{q^{d-2-k}} \pmod{y_k}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} a_{j,d-k} &\equiv \left(\frac{a_{j1}}{a_{i1}} \right)^{q^{d-1-k}} \pmod{y_k} \\ &= \left(\frac{1 - (y_j \cdots y_{d-1})^{q-1}}{1 - y_{d-1}^{q-1}} \cdot \frac{1 - y_{d-1}^{q-1}}{1 - (y_k \cdots y_{d-1})^{q-1}} \right)^{q^{d-1-k}} \\ &\equiv 1 \pmod{y_k}. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$v_{d-k} = \frac{a_{k,d-1-k}^q - y_k^{q^{d-k} - q^{d-1-k}} a_{k,d-1-k}}{y_k^{q^{d-k}}} \in \mathbb{F}_q(y_k, \dots, y_{d-1}).$$

Par récurrence, on sait que $\text{ord}_{y_k}(a_{k,d-1-k}) = 0$. On en déduit que $\text{ord}_{y_k}(v_{d-k}) = -q^{d-k}$. Ceci termine la preuve du lemme. \square

(4.2.8) COROLLAIRE.— Soit $I = \Delta \setminus \{\alpha_i\}$, considérons le morphisme

$$\rho'_I : \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}$$

$$(y_1, \dots, y_{d-1}) \longmapsto \left(\left(\frac{a_{1,d-i}}{(y_1 \cdots y_{i-1})^{q^{d-i}}}, \dots, \frac{a_{i-1,d-i}}{y_{i-1}^{q^{d-i}}} \right), v_{d-i}^{-1}, \left(\frac{1}{y_{i+1} \cdots y_{d-1}}, \dots, \frac{1}{y_{d-1}} \right) \right)$$

qui est le composé de ρ_I avec le morphisme $\text{Id} \times ()^{-1} \times \text{Id} : \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i} \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}$. Avec la même formule, ρ'_I se prolonge en un morphisme

$$\bar{\rho}_I : \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I} \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}.$$

De plus,

(a) La restriction de $\bar{\rho}_I$ à C_I est un morphisme radiciel (cf. [Bor91, AG. 18.2]), donné par

$$C_I = \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \{0\} \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \{0\} \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}$$

$$\left((y_1, \dots, y_{i-1}), 0, (y_{i+1}, \dots, y_{d-1}) \right) \longmapsto \left(\left(\left(\frac{1}{y_1 \cdots y_{i-1}} \right)^{q^{d-i}}, \left(\frac{1}{y_2 \cdots y_{i-1}} \right)^{q^{d-i}}, \dots, \left(\frac{1}{y_{i-1}} \right)^{q^{d-i}} \right), \right.$$

$$\left. 0, \left(\frac{1}{y_{i+1} \cdots y_{d-1}}, \frac{1}{y_{i+2} \cdots y_{d-1}}, \dots, \frac{1}{y_{d-1}} \right) \right).$$

(b) $\bar{\rho}_I$ est surjectif, et induit un isomorphisme $U_I \backslash \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}$, où $U_I \backslash \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I}$ est le quotient de la \mathbb{F}_q -variété affine $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I}$ par le groupe fini U_I .

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} & \hookrightarrow & \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I} & \xleftarrow{\quad} & C_I = \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \{0\} \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i} \\ \downarrow /U_I \downarrow \rho_I & & \downarrow \bar{\rho}_I & & \downarrow \\ \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i} & \xrightarrow{\text{Id} \times ()^{-1} \times \text{Id}} & \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i} & \xleftarrow{\text{Id}} & \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \{0\} \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i} \end{array}$$

Preuve : (a) D'après le lemme (4.2.7), $a_{j,d-i} \equiv 1 \pmod{y_i}$, $1 \leq j \leq i-1$ et $v_{d-i}^{-1} \equiv 0 \pmod{y_i}$. Comme la composante C_I est contenue dans l'hyperplan $y_i = 0$ (voir (4.2.5)), ρ'_I se prolonge à $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I}$ de la manière énoncée comme ci-dessus.

(b) Comme $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I}$ est une variété affine normale et U_I est fini, le quotient $U_I \backslash \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I}$ existe (cf. [Bor91, I 6.15]) et il est normal. Notons que le morphisme $\bar{\rho}_I$ est constant sur les U_I -orbites, il se factorise donc par le quotient $U_I \backslash \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I}$, et induit un morphisme radiciel birationnel $\alpha : U_I \backslash \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1,I} \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_q}^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1-i}$; il s'ensuit que α est un isomorphisme en vertu du « main theorem » de Zariski [Liu02, 4.4]. □

5 Théorème principal

5.1 Énoncé du théorème

Pour alléger un peu les notations, on notera $\Omega := \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ et $\text{DL} := \text{DL}^{d-1}$. Considérons la compactification $\overline{\Omega}$ de Ω et sa normalisation $\overline{\text{DL}}$ dans DL (cf. [BR09] ou 2.1). Soient I un sous-ensemble propre de Δ et C_I la composante irréductible de $X(\prod_{i \in I} s_{\alpha_i}) \subset \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ fixée par U_I , où le produit est pris suivant l'ordre $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_{d-1}}$. Rappelons que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{DL} & \xrightarrow{j'} & \overline{\text{DL}} & \xleftarrow{j'_I} & \overline{\pi}^{-1}(C_I) \\ \pi \downarrow & & \overline{\pi} \downarrow & & \overline{\pi}_I \downarrow \\ \Omega & \xrightarrow{j} & \overline{\Omega} & \xleftarrow{j_I} & C_I \end{array}$$

où $\overline{\pi}^{-1}(C_I) := (\overline{\text{DL}} \times_{\overline{\Omega}} C_I)_{\text{red}}$. Dans cette partie, on se consacre à démontrer la conjecture A' dans ce cas.

(5.1.1) THÉORÈME.— *Le morphisme de restriction*

$$R\Gamma(\text{DL}, \Lambda) \xrightarrow{\text{res}} R\Gamma(\overline{\pi}^{-1}(C_I), j'_I{}^* Rj'_I{}^* \Lambda)$$

induit un isomorphisme

$$R\Gamma(\text{DL}, \Lambda)^{U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{\pi}^{-1}(C_I), j'_I{}^* Rj'_I{}^* \Lambda).$$

Comme un sous-groupe de Levi rationnel de GL_d est un produit de GL_n , d'après (3.2.5) et 3.3, il suffit d'établir le cas de codimension 1.

5.2 Étape 1 : le cas de codimension 1

On reprend l'idée de [BR06] et de Dudas [Dud10]. Lorsque C_I est une composante de codimension 1, il existe une racine α_i telle que $I = \Delta \setminus \{\alpha_i\}$. Notons Ω^I (resp. DL^I) la compactification partielle $\Omega \coprod C_I$ (resp. $\text{DL} \coprod \overline{\pi}^{-1}(C_I)$). Considérons la préimage Y^0 d'une composante connexe de $U \setminus \text{DL}$ (cf. [BR06, 3.2] et [Dud10, Prop. 4.53]). Ici Y^0 est une composante connexe de DL , finie étale au-dessus de Ω de groupe de Galois

$$H := \text{Ker}(\text{Norm} : \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{F}_q^\times) \cong \mathbb{Z}/(1 + q + \dots + q^{d-1}).$$

Le tore non-déployé $T_d \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q^\times$ (cf. section 4) agit transitivement sur les composantes connexes de $U \setminus \text{DL}$. En notant que H est le stabilisateur de la composante $U \setminus Y^0$ dans T_d (c'est aussi le stabilisateur de Y^0), on obtient un isomorphisme $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q) \times (T_d \rtimes \langle F \rangle)^{\text{opp}}$ -équivariant (ici F désigne l'endomorphisme de Frobenius) :

$$Y^0 \times_H T_d \xrightarrow{\sim} \text{DL}.$$

Rappelons que le groupe fondamental modéré de \mathbb{G}_m^{d-1} est le produit $(d-1)$ fois du groupe fondamental modéré de \mathbb{G}_m . Alors, il existe $d-1$ entiers positifs m_1, \dots, m_{d-1} divisant $|H|$, et un revêtement $\varpi : \mathbb{G}_m^{d-1} \rightarrow \mathbb{G}_m^{d-1}$ de groupe de Galois $\prod_j \mu_{m_j}$ tels que le revêtement galoisien $U \setminus Y^0 \rightarrow U \setminus \Omega = \mathbb{G}_m^{d-1}$ soit un quotient de ϖ . On note N le groupe de Galois du revêtement $\mathbb{G}_m^{d-1} \rightarrow U \setminus Y^0$ et on a un isomorphisme canonique $(\prod_j \mu_{m_j})/N \xrightarrow{\sim} H$. En diminuant les m_j , on peut supposer et on le fera que la restriction $\phi_j : \mu_{m_j} \rightarrow H$ du morphisme canonique $\prod_j \mu_{m_j} \rightarrow H$ est injective pour tout j . On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^{d-1} & \xrightarrow{/N} & U \setminus Y^0 \\ & \searrow \varpi & \downarrow /H \\ & / \prod_j \mu_{m_j} & \mathbb{G}_m^{d-1} = U \setminus \Omega \end{array}$$

Notons Y^1 le produit fibré de \mathbb{G}_m^{d-1} et Ω au-dessus de \mathbb{G}_m^{d-1} via ϖ et l'application de quotient par U . On peut alors former le diagramme suivant, dans lequel les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc} Y^1 & \longrightarrow & U_I \setminus Y^1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^{d-1} & & \\ \downarrow \pi^1 & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Y^0 & \longrightarrow & U_I \setminus Y^0 & \longrightarrow & U \setminus Y^0 & & \\ \downarrow \pi_0 & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega & \longrightarrow & U_I \setminus \Omega & \longrightarrow & U \setminus \Omega & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{G}_m^{d-1} \end{array}$$

/ $\prod \mu_{m_j}$

Via l'identification $U_I \setminus \Omega \xrightarrow{\sim} (\Omega^{i-1} \times \Omega^{d-1-i}) \times \mathbb{G}_m$ (cf. 4.2.3), l'application $U_I \setminus \Omega \rightarrow V_I \setminus (U_I \setminus \Omega) = \mathbb{G}_m^{d-1}$ se décompose en $\pi_{V_I} \times \text{Id}_{\mathbb{G}_m}$ où V_I est le radical unipotent de L_I (voir section 2.2), $\pi_{V_I} : \Omega^{i-1} \times \Omega^{d-1-i} \rightarrow \mathbb{G}_m^{d-2}$ est le morphisme de quotient par V_I . L'avantage de cette construction est que si l'on forme le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y_I^1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^{d-2} \\ \downarrow & & \downarrow / \prod_{j \neq i} \mu_{m_j} \\ \Omega^{i-1} \times \Omega^{d-1-i} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^{d-2} \end{array}$$

on peut décomposer le quotient $U_I \setminus Y^1 \xrightarrow{\sim} Y_I^1 \times \mathbb{G}_m$ de manière compatible avec la décomposition $U_I \setminus \Omega = (\Omega^{i-1} \times \Omega^{d-1-i}) \times \mathbb{G}_m$. Par construction, Y_I^1 est étale au-dessus de la variété normale $\Omega^{i-1} \times \Omega^{d-1-i}$, et donc elle est normale.

On peut alors former un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
U_I \backslash Y^1 = Y_I^1 \times \mathbb{G}_m & \xleftarrow{j'_1} & Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{i'_{1,I}} & Y_I^1 \times \{0\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
U_I \backslash Y^0 & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega^{d-1-i} & \xrightarrow{\quad} & \Omega^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega^{d-1-i} & \xleftarrow{\quad} & \Omega^{i-1} \times \{0\} \times \Omega^{d-1-i}
\end{array}$$

dont le morphisme $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ au milieu est donné par $x \mapsto x^{m_i}$. La variété normale $Y_I^1 \times \mathbb{A}^1$ s'identifie alors à la normalisation de $\Omega^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega^{d-1-i}$ dans $U_I \backslash Y^1$.

Notons $\overline{Y^0} \xrightarrow{\pi_0} \Omega^I$ la normalisation de Ω^I dans Y^0 et $\overline{\pi_0^{-1}(C_I)}$ le sous schéma fermé avec la structure réduite de $\overline{Y^0}$. Comme Ω^I est affine (voir le lemme (4.2.5)), $\overline{Y^0}$ est affine. Comme Y^0 est une composante connexe de DL, et $(\text{DL}^I, \overline{\pi_0^{-1}(C_I)})$ est un couple lisse (cf. [BR09, Thm. 1.2 (a)]), on sait alors que $(\overline{Y^0}, \overline{\pi_0^{-1}(C_I)})$ est un couple lisse. Ceci nous fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
Y^0 & \xrightarrow{j_0} & \overline{Y^0} & \xleftarrow{j_{0,I}} & \overline{\pi_0^{-1}(C_I)} \\
\downarrow \pi_0 & & \downarrow \overline{\pi_0} & & \downarrow \\
\Omega & \xrightarrow{j} & \Omega^I & \xleftarrow{j_I} & C_I
\end{array}$$

En notant que U_I est un groupe fini, on peut former le quotient $U_I \backslash \overline{Y^0}$ qui est une variété normale, et elle s'identifie donc à la normalisation de $U_I \backslash \Omega^I = \Omega^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega^{d-1-i}$ (cf. Corollaire (4.2.8) (b)) dans $U_I \backslash Y^0$. En plus, U_I agit trivialement sur $\overline{\pi_0^{-1}(C_I)}$, donc le quotient $\overline{\pi_0^{-1}(C_I)} \rightarrow U_I \backslash \overline{\pi_0^{-1}(C_I)}$ est un morphisme radiciel. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
U_I \backslash Y^1 = Y_I^1 \times \mathbb{G}_m & \xleftarrow{j'_1} & Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{i'_{1,I}} & Y_I^1 \times \{0\} \\
\downarrow /N & & \downarrow & & \downarrow /N' \\
U_I \backslash Y^0 & \xrightarrow{\quad} & U_I \backslash \overline{Y^0} & \xleftarrow{\quad} & U_I \backslash \overline{\pi_0^{-1}(C_I)} \\
\downarrow /H & & \downarrow & & \downarrow /H' \\
\Omega^{i-1} \times \mathbb{G}_m \times \Omega^{d-1-i} & \xrightarrow{\quad} & \Omega^{i-1} \times \mathbb{A}^1 \times \Omega^{d-1-i} & \xleftarrow{\quad} & \Omega^{i-1} \times \{0\} \times \Omega^{d-1-i}
\end{array}$$

LEMME.— *Le morphisme $Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow U_I \backslash \overline{Y^0}$ est étale.*

Preuve : Notons N' le groupe de Galois de $Y_I^1 \times \{0\}$ au-dessus de $U_I \backslash \overline{\pi_0^{-1}(C_I)}$ et H' le quotient de $\prod_{j \neq i} \mu_{m_j}$ par N' . Par construction, H' agit sur $\overline{Y^0}$ commutant avec l'action de U_I , donc H' agit sur le quotient $U_I \backslash \overline{Y^0}$. D'après [BR09, Thm. 1.2 (c)], le stabilisateur dans H' d'un élément de $U_I \backslash \overline{\pi_0^{-1}(C_I)}$ est égal à $N_c(Y_{c,C_I}) \cap H'$,

où $N_c(Y_{c,c_I})$ est un sous-groupe de T_d défini dans *loc. cit.* section 1.3. En fait, $N_c(Y_{c,c_I}) \subset H$ (cf. [BR06, Prop. 3.5]), on en déduit que $H' = H/N_c(Y_{c,c_I})$. En d'autres termes, on a un diagramme dont la deuxième et la troisième lignes et la deuxième et la troisième colonnes sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 1 & & & 1 \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \mu_{m_i} & \xrightarrow{\phi_i} & N_c(Y_{c,c_I}) & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \prod_j \mu_{m_j} & \longrightarrow & H \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & \prod_{j \neq i} \mu_{m_j} & \longrightarrow & H' = H/N_c(Y_{c,c_I}) \longrightarrow 1 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 1 & & 1
\end{array}$$

Rappelons que ϕ_i est injective. D'après [BR06, Prop. 3.5], ϕ_i est aussi surjective. Donc ϕ_i est un isomorphisme. Ceci implique que $N \xrightarrow{\sim} N'$. D'après [SGA71, Exp. V Prop. 2.6], $Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow U_I \setminus \overline{Y^0}$ est un morphisme étale. \square

Posons $\overline{Y^1} := \overline{Y^0} \times_{U_I \setminus \overline{Y^0}} (Y_I^1 \times \mathbb{A}^1)$ le produit fibré de $\overline{Y^0}$ et $Y_I^1 \times \mathbb{A}^1$ au-dessus de $U_I \setminus \overline{Y^0}$, et $\overline{\pi^1} : \overline{Y^1} \rightarrow \overline{Y^0}$ la projection vers $\overline{Y^0}$. Alors $\overline{\pi^1}$ est un morphisme étale. Notons $\overline{\pi_1} := \overline{\pi_0} \circ \overline{\pi^1}$, et $\overline{\pi_1}^{-1}(C_I)$ le sous-schéma fermé avec la structure réduite de $\overline{Y^1}$.

(5.2.1) LEMME.— $(\overline{Y^1}, \overline{\pi_1}^{-1}(C_I))$ est un couple lisse.

Preuve : D'après le lemme précédent, $\overline{Y^1}$ est étale au-dessus de $\overline{Y^0}$. On déduit l'énoncé du lemme du fait que $(\overline{Y^0}, \overline{\pi_0}^{-1}(C_I))$ est un couple lisse. \square

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & Y^1 & \xrightarrow{j_1} & \overline{Y^1} \\
& & \swarrow \pi^1 & & \swarrow \overline{\pi^1} \\
Y^{0c} & \xrightarrow{j_0} & \overline{Y^0} & & \\
\downarrow & & \downarrow j_1 & & \downarrow \\
& & U_I \setminus Y^1 & \xrightarrow{j_1} & Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 \\
& & \swarrow & & \swarrow \\
U_I \setminus Y^{0c} & \xrightarrow{j_0} & U_I \setminus \overline{Y^0} & &
\end{array}$$

où le morphisme $j_1 : Y^1 \rightarrow \overline{Y^1}$ est donné par le produit des morphismes $Y^1 \rightarrow Y^0 \rightarrow \overline{Y^0}$ et $Y^1 \rightarrow U_I \backslash Y^1 \rightarrow Y_I^1 \times \mathbb{A}^1$.

LEMME.— *Les carrés*

$$\begin{array}{ccc} Y^1 & \xrightarrow{j_1} & \overline{Y^1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y^0 & \longrightarrow & \overline{Y^0} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y^1 & \xrightarrow{j_1} & \overline{Y^1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_I \backslash Y^1 & \longrightarrow & Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 \end{array}$$

sont cartésiens

Preuve : Tout d'abord, notons que le carré

$$\begin{array}{ccc} Y^0 & \longrightarrow & \overline{Y^0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_I \backslash Y^0 & \longrightarrow & U_I \backslash \overline{Y^0} \end{array}$$

est cartésien, car Y^0 est l'image réciproque de l'ouvert $U_I \backslash Y^0$ dans $\overline{Y^0}$. Pour le premier carré, on a donc

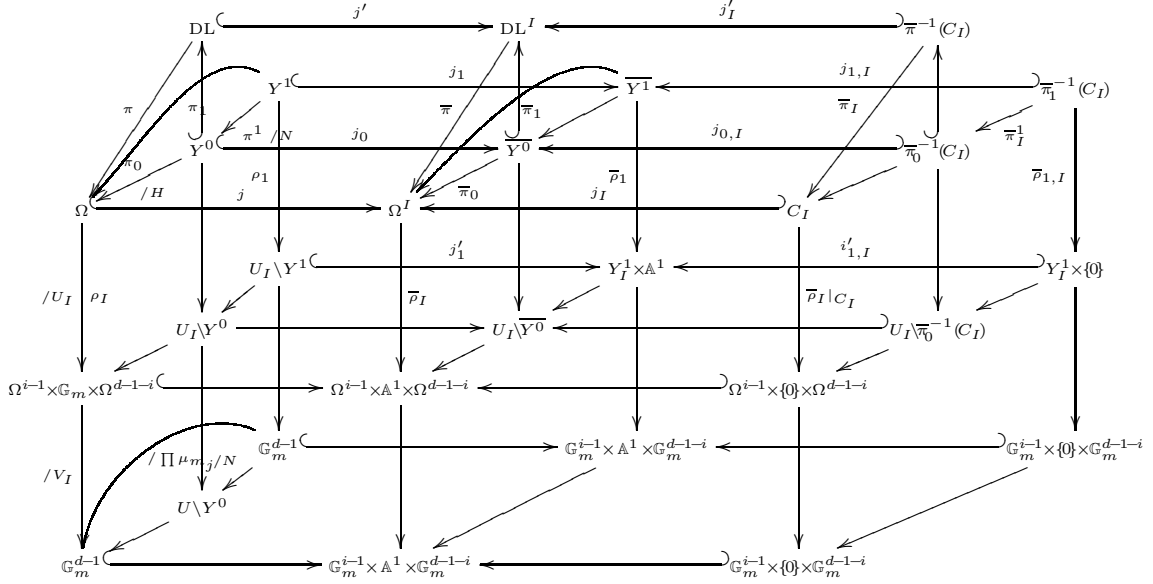
$$\begin{aligned} \overline{Y^1} \times_{\overline{Y^0}} Y^0 &= (Y_I^1 \times \mathbb{A}^1) \times_{U_I \backslash \overline{Y^0}} \overline{Y^0} \times_{\overline{Y^0}} Y^0 \\ &= (Y_I^1 \times \mathbb{A}^1) \times_{U_I \backslash \overline{Y^0}} (U_I \backslash Y^0) \times_{U_I \backslash Y^0} Y^0 \\ &= U_I \backslash Y^1 \times_{U_I \backslash Y^0} Y^0 = Y^1. \end{aligned}$$

Pour le deuxième carré, on a

$$\begin{aligned} \overline{Y^1} \times_{Y_I^1 \times \mathbb{A}^1} U_I \backslash Y^1 &= \overline{Y^1} \times_{U_I \backslash \overline{Y^0}} (Y_I^1 \times \mathbb{A}^1) \times_{Y_I^1 \times \mathbb{A}^1} U_I \backslash Y^1 \\ &= \overline{Y^0} \times_{U_I \backslash \overline{Y^0}} U_I \backslash Y^1 \\ &= \overline{Y^0} \times_{U_I \backslash \overline{Y^0}} U_I \backslash Y^0 \times_{U_I \backslash Y^0} U_I \backslash Y^1 \\ &= Y^0 \times_{U_I \backslash Y^0} U_I \backslash Y^1 = Y^1. \end{aligned}$$

D'où l'énoncé du lemme. □

D'après ce qui précède, on obtient le diagramme suivant :



(5.2.2) On commence maintenant à démontrer le cas de codimension 1. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y^1 \subset & \xrightarrow{j_1} & \bar{Y}^1 & \xleftarrow{j_{1,I}} & \pi_1^{-1}(C_I) \\
 \downarrow \rho_1 & & \downarrow \bar{\rho}_1 & & \downarrow \bar{\rho}_{1,I} \\
 U_I \setminus Y^1 = Y_I^1 \times \mathbb{G}_m & \xrightarrow{j'_1} & Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{i'_{1,I}} & Y_I^1 \times \{0\}
 \end{array}$$

Comme $\bar{\rho}_1$ est fini, le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow \rho_{1,*} \rho_1^* \Lambda$ des faisceaux étales sur $U_I \setminus Y^1$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 R\Gamma(Y^1, \Lambda) & \xrightarrow[\text{(4)}]{\text{res}} & R\Gamma(\pi_1^{-1}(C_I), j_{1,I}^* Rj_{1,*} \Lambda) \\
 \uparrow \text{(1)} & & \uparrow \text{(3)} \\
 R\Gamma(Y_I^1 \times \mathbb{G}_m, \Lambda) & \xrightarrow[\text{(2)}]{\text{res}} & R\Gamma(Y_I^1 \times \{0\}, i'_{1,I}^* Rj'_{1,*} \Lambda)
 \end{array}$$

LEMME.— Le morphisme (4) induit un isomorphisme :

$$R\Gamma(Y^1, \Lambda)^{U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\pi_1^{-1}(C_I), j_{1,I}^* Rj_{1,I,*} \Lambda).$$

Preuve :

– Étape 1 : Notons tout d’abord que l’on a un isomorphisme de faisceaux étales sur $U_I \setminus Y^1$

$$\Lambda \xrightarrow{\sim} (\rho_{1,*} \Lambda)^{U_I},$$

où ρ_1 est fini étale de groupe de Galois U_I avec $|U_I|$ inversible dans Λ . Donc (1) fournit un isomorphisme

$$R\Gamma(Y_I^1 \times \mathbb{G}_m, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(Y^1, \Lambda)^{U_I}.$$

– Étape 2 : Notons que le diagramme :

$$Y_I^1 \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{j'_1 = \text{Id} \times j_2} Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 \xleftarrow{i'_{1,I} = \text{Id} \times i_2} Y_I^1 \times \{0\}$$

est un changement de base des inclusions :

$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{j_2} \mathbb{A}^1 \xleftarrow{i_2} \{0\}$$

qui induisent un isomorphisme canonique : $R\Gamma(\mathbb{G}_m, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\{0\}, i_2^* Rj_{2*} \Lambda)$.
Considérons ensuite le diagramme suivant dont les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} Y_I^1 & \xrightarrow{\text{Id}} & Y_I^1 & \xleftarrow{\text{Id}} & Y_I^1 \\ p_1 \uparrow & & p'_1 \uparrow & & p''_1 \uparrow \\ Y_I^1 \times \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\text{Id} \times j_2} & Y_I^1 \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{\text{Id} \times i_2} & Y_I^1 \times \{0\} \\ p_2 \downarrow & & p'_2 \downarrow & & p''_2 \downarrow \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{j_2} & \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{i_2} & \{0\}. \end{array}$$

Par la formule de Künneth, on a

$$\begin{aligned} R\Gamma(Y_I^1 \times \mathbb{G}_m, \Lambda) &= R\Gamma(Y_I^1, \Lambda) \otimes^L R\Gamma(\mathbb{G}_m, \Lambda) = R\Gamma(Y_I^1, \Lambda) \otimes^L R\Gamma(\{0\}, i_2^* Rj_{2*} \Lambda) \\ &= R\Gamma(Y_I^1 \times \{0\}, p_1'^* \Lambda \otimes p_2'^* i_2^* Rj_{2*} \Lambda) \\ &= R\Gamma(Y_I^1 \times \{0\}, (\text{Id} \times i_2)^* (p_1'^* \Lambda \otimes p_2'^* Rj_{2*} \Lambda)) \\ (p_2' \text{ est lisse.}) &= R\Gamma(Y_I^1 \times \{0\}, (\text{Id} \times i_2)^* (p_1'^* \Lambda \otimes R(\text{Id} \times j_2)_* p_2'^* \Lambda)) \\ (\text{formule de projection}) &= R\Gamma(Y_I^1 \times \{0\}, (\text{Id} \times i_2)^* R(\text{Id} \times j_2)_* ((\text{Id} \times j_2)^* p_1'^* \Lambda \otimes p_2'^* \Lambda)) \\ &= R\Gamma(Y_I^1 \times \{0\}, i_{1,I}^* Rj_{1*}' \Lambda) \end{aligned}$$

i.e. (2) est un isomorphisme.

– Étape 3 : Notons que U_I est un p -groupe fini. Posons $e_1 \in \Lambda[U_I]$ l'idempotent central associé à la représentation triviale de U_I , et $e_1' := 1 - e_1 \in \Lambda[U_I]$. Le but est de montrer que

$$\bar{\rho}_{1,I,*} j_{1,I}^* Rj_{1*}' \Lambda = i_{1,I}^* Rj_{1*}' \Lambda.$$

Tout d'abord, notons $D(?, \Lambda - U_I)$ la catégorie dérivée des faisceaux étales de Λ -modules U_I -équivariants sur ?. Le foncteur

$$j_{1,I}^* Rj_{1*}' : D^+(Y^1, \Lambda - U_I) \longrightarrow D^+(\bar{\pi}_1^{-1}(C_I), \Lambda - U_I)$$

est U_I -équivariant, et induit une décomposition :

$$j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda = e_1(j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda) \oplus e'_1(j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda).$$

D'après le théorème de pureté relative ([SGA73, Exp. XVI]) par rapport au couple lisse $(\overline{Y^1}, \overline{\pi_1^{-1}}(C_I))$ (*cf.* le lemme (5.2.1)), on a des isomorphismes de Λ -modules :

$$\begin{aligned} \alpha : \Lambda &\xrightarrow{\sim} j_{1,I}^* R^0 j_{1*} \Lambda, \\ \beta : \Lambda(-1) &\xrightarrow{\sim} j_{1,I}^* R^1 j_{1*} \Lambda. \end{aligned}$$

Notons que α, β sont U_I -équivariants. En effet, on sait par définition que α est U_I -équivariant. Si $\Lambda = \mathbb{Z}/n$ pour un entier n premier à p , β est alors induit par le morphisme $\beta(1) : \Lambda \rightarrow j_{1,I}^* R^1 j_{1*} \Lambda(1)$ qui envoie 1 vers la classe du μ_n -torseur des racines n -ièmes de t , où t est une équation locale de $\overline{\pi_1^{-1}}(C_I)$. On peut se borner à un voisinage local strictement hensélien et U_I stable. Un élément $g \in U_I$ envoie ce toseur vers la classe du μ_n -torseur des racines n -ièmes de t' , où $t' = tu$ avec u une unité. Dans ce voisinage l'équation $X^n - u = 0$ admet une solution, donc le toseur donné par t' est isomorphe au toseur donné par t . C'est-à-dire $\beta(1)$ est U_I -équivariant ; il s'ensuit que β est U_I -équivariant. Donc, $e_1(j_{1,I}^* R^m j_{1*} \Lambda) = \Lambda$ pour $m = 0, 1$. On a alors un triangle distingué

$$\Lambda \longrightarrow j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda \longrightarrow \Lambda(-1)[-1] \xrightarrow{+1}$$

dans $D^+(\overline{\pi_1^{-1}}(C_I), \Lambda - U_I)$, et on en déduit que

$$j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda = e_1(j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda) \quad \text{et} \quad e'_1(j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda) = 0.$$

Notons que le morphisme $\overline{\rho}_{1,I}$ induit un foncteur U_I -équivariant :

$$\overline{\rho}_{1,I,*} : D^+(\overline{\pi_1^{-1}}(C_I), \Lambda - U_I) \rightarrow D^+(Y_I^1 \times \{0\}, \Lambda - U_I),$$

on a donc $e'_1(\overline{\rho}_{1,I,*} j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda) = 0$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_{1,I,*} j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda &= i_{1,I}^* Rj_{1*}' \rho_* \Lambda \\ &= i_{1,I}^* Rj_{1*}' (\Lambda \oplus e'_1(\rho_* \Lambda)) \\ &= i_{1,I}^* Rj_{1*}' \Lambda \oplus i_{1,I}^* Rj_{1*}' e'_1(\rho_* \Lambda) \\ &= i_{1,I}^* Rj_{1*}' \Lambda \oplus e'_1(\overline{\rho}_{1,I,*} j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda) \\ &= i_{1,I}^* Rj_{1*}' \Lambda, \end{aligned}$$

i.e. le morphisme (3) est un isomorphisme. D'où l'énoncé du lemme. \square

(5.2.3) Notons que la composition $\overline{Y^1} \xrightarrow{\pi^1} \overline{Y^0} \hookrightarrow \text{DL}^I$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
R\Gamma(\text{DL}, \Lambda)^{U_I} & \longrightarrow & R\Gamma(Y^0, \Lambda)^{U_I} & \longrightarrow & R\Gamma(Y^1, \Lambda)^{U_I} \\
(6) \downarrow \text{res.} & & (5) \downarrow \text{res.} & & \cong \downarrow \text{res.} \\
R\Gamma(\pi^{-1}(C_I), j_I'^* Rj_{I*} \Lambda) & \longrightarrow & R\Gamma(\pi_0^{-1}(C_I), j_{0,I}^* Rj_{0*} \Lambda) & \longrightarrow & R\Gamma(\pi_1^{-1}(C_I), j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda)
\end{array}$$

LEMME.— *Les morphismes (5) et (6) sont des isomorphismes.*

Preuve : Considérons tout d'abord le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
Y^1 & \xrightarrow{j_1} & \overline{Y^1} & \xleftarrow{j_{1,I} \pi_1^{-1}} & \pi_1^{-1}(C_I) \\
\downarrow \pi^1 & & \downarrow \pi^1 & & \downarrow \pi_1^1 \\
Y^0 & \xrightarrow{j_0} & \overline{Y^0} & \xleftarrow{j_{0,I} \pi_0^{-1}} & \pi_0^{-1}(C_I)
\end{array}$$

Par construction, $\pi^1 : \overline{Y^1} \rightarrow \overline{Y^0}$ est un morphisme étale de groupe de Galois N . Alors, pour tout faisceau étale \mathcal{F} sur $\overline{Y^0}$, on a un isomorphisme canonique :

$$R\Gamma(\overline{Y^0}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R_N(R\Gamma(\overline{Y^1}, \pi_1^* \mathcal{F})),$$

où R_N est le foncteur dérivé du foncteur des N -invariants. En particulier, en tenant compte du fait que l'action de N commute avec celle de U_I , ceci induit un isomorphisme :

$$R\Gamma(Y^0, \Lambda)^{U_I} \xrightarrow{\sim} R_N(R\Gamma(Y^1, \Lambda)^{U_I}),$$

De même, $\pi_1^1 := \pi^1|_{\pi_1^{-1}(C_I)}$ induit un isomorphisme :

$$\begin{aligned}
R\Gamma(\pi_0^{-1}(C_I), j_{0,I}^* Rj_{0*} \Lambda) & \xrightarrow{\sim} R_N(R\Gamma(\pi_1^{-1}(C_I), \pi_1^1 j_{0,I}^* Rj_{0*} \Lambda)) \\
& \xrightarrow{\sim} R_N(R\Gamma(\pi_1^{-1}(C_I), j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda)).
\end{aligned}$$

Donc le morphisme (5) s'identifie à $R_N(R\Gamma(Y^1, \Lambda)^{U_I}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\pi_1^{-1}(C_I), j_{1,I}^* Rj_{1*} \Lambda)$. On en déduit qu'il est un isomorphisme.

Notons que $\text{DL} = Y^0 \times_H T_d$, et l'action de U_I commute avec celle de T_d . Alors

$$\begin{aligned}
R\Gamma(\text{DL}, \Lambda)^{U_I} & = (R\Gamma(Y^0, \Lambda) \otimes_{\Lambda[H]}^L \Lambda T_d)^{U_I} \\
& = R\Gamma(Y^0, \Lambda)^{U_I} \otimes_{\Lambda[H]}^L \Lambda T_d
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\Lambda_{\text{DL}} = \Lambda_{Y^0} \otimes_{\Lambda H} \Lambda T_d$. Alors,

$$R\Gamma(\pi^{-1}(C_I), j_I'^* Rj_{I*} \Lambda) = R\Gamma(\pi_0^{-1}(C_I), j_{0,I}^* Rj_{0*} \Lambda) \otimes_{\Lambda[H]}^L \Lambda T_d.$$

On en déduit que le morphisme (6) est un isomorphisme. Ceci termine la preuve du cas de codimension 1. \square

Références

- [Bor91] Armand BOREL : *Linear algebraic groups*, volume 126 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1991.
- [BR06] Cédric BONNAFÉ et Raphaël ROUQUIER : Coxeter orbits and modular representations. *Nagoya Math. J.*, 183:1–34, 2006.
- [BR09] Cédric BONNAFÉ et Raphaël ROUQUIER : Compactification des variétés de Deligne-Lusztig. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(2):621–640, 2009.
- [Dat12] Jean-François DAT : A lemma on vanishing cycles and its application to the tame Lubin-Tate space. *Math. Res. Lett. (1)*, 19:1–9, 2012.
- [DL76] P. DELIGNE et G. LUSZTIG : Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 103(1):103–161, 1976.
- [Dud10] Olivier DUDAS : Géométrie des variétés de Deligne-Lusztig : décompositions, cohomologie modulo l et représentations modulaire. *Thèse de doctorat*, 2010.
- [Har77] Robin HARTSHORNE : *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Ito05] Tetsushi ITO : Weight-monodromy conjecture for p -adically uniformized varieties. *Invent. Math.*, 159(3):607–656, 2005.
- [Liu02] Qing LIU : *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.
- [Lus76] G. LUSZTIG : On the finiteness of the number of unipotent classes. *Invent. Math.*, 34(3):201–213, 1976.
- [Lus77] G. LUSZTIG : Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius. *Invent. Math.*, 38(2):101–159, 1976/77.
- [SGA71] *Revêtements étales et groupe fondamental*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61 (SGA 1),.
- [SGA72] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4).
- [SGA73] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4).
- [Spr98] T. A. SPRINGER : *Linear algebraic groups*, volume 9 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second édition, 1998.
- [Wan13] Haoran WANG : Géométrie et cohomologie de l'espace de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Thèse de doctorat UPMC*, 2013.

HAORAN WANG

Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu
`haoran@math.jussieu.fr`

Adresse Présente : Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn,
Germany